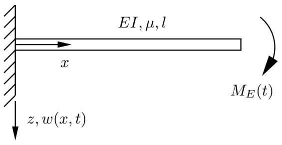
Tutorium

Aufgabe 84

Ein Kragbalken wird wie abgebildet durch ein Moment am rechten Rand belastet.



(a) Wie lauten die *geometrischen* Randbedingungen für das System?

(b) Stellen Sie die Berechnungsgleichungen für die kinetische Energie K und die potentielle Energie U des Gesamtsystems auf. Geben Sie darüber hinaus die vom äußeren Moment verrichtete virtuelle Arbeit δA an.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferenzialgleichung und die *dynamischen* Randbedingungen her.

Geg.: $EI, \mu := \rho A, l, M_E(t)$

(a) Geometrische Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta w(0,t) = 0 \tag{1}$$
$$w'(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta w'(0,t) = 0 \tag{2}$$

(b) Kinetische und potenzielle Energie sowie die virtuelle Arbeit des eingeprägten Momentes $M(t) := M_E(l,t)$:

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x \tag{3}$$
$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI{w''}^2 \mathrm{d}x \tag{4}$$
$$\delta A = M(t)\delta w'(l,t) \tag{5}$$

(c) Das Prinzip von Hamilton (auch Prinzip der stationären/kleinsten Wirkung genannt) lautet:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K-U)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta A \mathrm{d}t = 0 \tag{6}$$

(d) Aus Gleichung (6) folgt:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^l EI{w''}^2 \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} M(t)\delta w'(l,t)\mathrm{d}t = 0 \tag{7}$$

Variation unter die Integrale ziehen:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2}\int_0^l \mu \delta\dot{w}^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^l EI\delta{w''}^2 \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} M(t)\delta w'(l,t)\mathrm{d}t = 0 \tag{8}$$

Durchführen der Variation:

$$\delta\dot{w}^2 = 2\dot{w}\delta\dot{w} \qquad \text{bzw.} \qquad \delta{w''}^2 = 2w''\delta w'' \tag{9}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l \mu \dot{w}\delta\dot{w} \mathrm{d}x - \int_0^l EIw''\delta w'' \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} M(t)\delta w'(l,t)\mathrm{d}t = 0 \tag{10}$$

Im Folgenden werden die Integrale der Übersichtlichkeit halber einzeln betrachtet. Dabei werden um δw und $\delta w'$ zu faktorisieren partielle Integrationen durchgeführt.

I

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\dot{w}\delta\dot{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^l \underbrace{\left[\mu\dot{w}\delta w\right]_{t_0}^{t_1}}_{\substack{=0,\ \text{siehe}\\ \text{Voraussetzungen}\\ \text{von Hamilton}}} \mathrm{d}x - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\ddot{w}\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{11}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\ddot{w}\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{12}$$

II

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EIw''\delta w''\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_{t_0}^{t_1}\left[EIw''\delta w'\right]_0^l \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EIw'''\delta w'\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{13}$$

beachte geom. RB bei $x=0$ $\Rightarrow$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} EIw''(l,t)\delta w'(l,t)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\left[EIw'''\delta w\right]_0^l \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EIw^{IV}\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{14}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} EIw''(l,t)\delta w'(l,t)\mathrm{d}t$$

beachte geom. RB bei $x=0$ $\Rightarrow$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} EIw'''(l,t)\delta w(l,t)\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EIw^{IV}\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{15}$$

III

$$\int_{t_0}^{t_1} M(t)\delta w'(l,t)\mathrm{d}t \qquad \text{wird nicht umgeformt} \tag{16}$$

Alles wieder ins Prinzip von HAMILTON einsetzen und sortieren:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left(-\mu\ddot{w} - EIw^{IV}\right)\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{17}$$
$$+\int_{t_0}^{t_1} \left\{-EIw''(l,t) + M(t)\right\}\delta w'(l,t)\mathrm{d}t \tag{18}$$
$$+\int_{t_0}^{t_1} \left\{EIw'''(l,t)\right\}\delta w(l,t)\mathrm{d}t = 0 \tag{19}$$

Da die Variationen δw, $\delta w'(l,t)$ und $\delta w(l,t)$ unabhängig sind und beliebig gewählt werden können, müssen die einzelnen Terme davor getrennt voneinander verschwinden. Aus Gleichung (17) folgt die Feldgleichung zu:

$$\ddot{w} + c^2 w^{IV} = 0 \qquad \text{mit} \qquad c^2 = \frac{EI}{\mu} \tag{20}$$

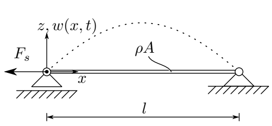
Aus Gleichung (18) und (19) folgen die dynamischen Randbedingungen, welche auch aus Freischnitten bestimmt werden könnten:

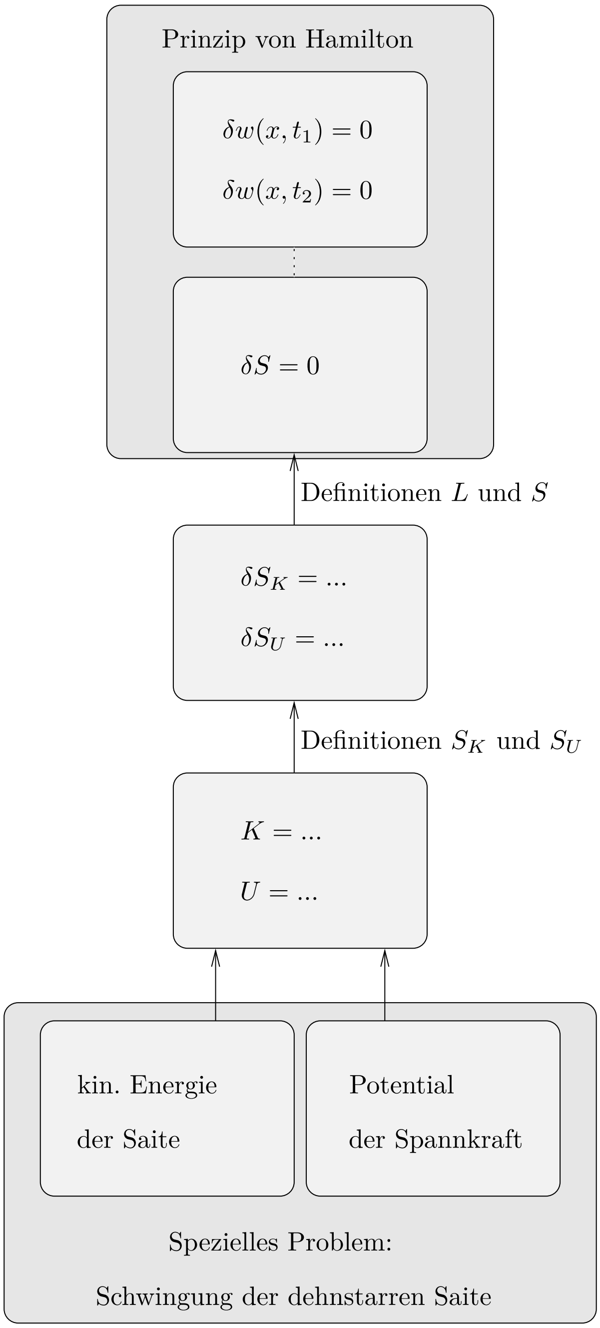
$$w''(l,t) = \frac{M(t)}{EI} \tag{21}$$
$$w'''(l,t) = 0 \tag{22}$$

Aufgabe 85

Eine (dehnstarre) Saite der Länge l wird mit F_s vorgespannt und trägt die Masse pro Länge $\mu := \rho A$. Leiten Sie die Bewegungsdifferenzialgleichung mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung (Prinzip von HAMILTON) her.

Geg.: F_s, μ, l





Damit man nicht den Überblick verliert, kommt hier ’mal eine Musterlösung in unüblicher Reihenfolge. <u>Zuerst</u> wird die Lösung der Aufgabe sehr kurz und übersichtlich angegeben. Und <u>danach</u> werden die Schritte erklärt, die in der Kurzlösung unterschlagen wurden.

Das Prinzip von HAMILTON besagt, dass die Variation des Wirkungsfunktionals S bei der gesuchten Lösung w gleich Null ist. D.h. die “Ableitung” von S in “Richtung” der (beliebigen) Funktion δw verschwindet an der “Stelle” w. Oder noch anders: Wenn man die gesuchte Verschiebung w verändert um eine andere Verschiebung δw, ändert sich der Wert des Funktionals S nicht, weil er an der Stelle w extremal ist. Als Formel:

$$\delta S(w,\delta w) = 0 \tag{23}$$

Für die schwingende Saite ergibt sich für die Variation mit dem, was unten unter **Berechnen der Variation** steht:

$$\delta S(w,\delta w) = \mu \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \dot{w}\delta\dot{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - F_s \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l w'\delta w'\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (24)$$

$$\delta S = 0 \quad (25)$$

oder mit der Abkürzung $\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l =: \iint_{tx}$ und mit dem, was unten unter **Berechnung von** $\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \dot{w}\delta\dot{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ **usw.** steht:

$$\delta S = 0 \quad (26)$$

$$0 = \mu \iint_{t\,x} \dot{w}\delta\dot{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - F_s \iint_{t\,x} w'\delta w'\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (27)$$

$$0 = -\mu \iint_{t\,x} \ddot{w}\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t + F_s \iint_{t\,x} w''\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (28)$$

$$0 = \iint_{t\,x} \big\{ -\mu\ddot{w} + F_s w''\big\}\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (29)$$

Da die Anfangs- und die Endzeit t_1 und t_2 beliebig gewählt werden können, und da außerdem die virtuelle Verschiebung δw beliebig ist, ist dies nur möglich genau dann wenn

$$0 = -\mu\ddot{w} + F_s w'' \quad (30)$$

Und dies ist die gesuchte Differentialgleichung.

Berechnen der Variation
S ist definiert als

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} A\mathrm{d}t \quad (31)$$

und L ist die LAGRANGE-Funktion, die sich aus der kinetischen Energie K und der potentiellen Energie U zusammensetzt als

$$L = K - U \quad (32)$$

Die kinetische Energie der schwingenden Saite mit konstanten Massebelegung ist:

$$K = \frac{1}{2}\mu \int_0^l \dot{w}^2\mathrm{d}x \quad (33)$$

Die potentielle Energie der undehnbaren Saite ist das Potential der Spannkraft F_s (Herleitung weiter unten unter **Berechnung des Potentials der Vorspannkraft**). Dieses ist:

$$U = \frac{1}{2}F_s \int_0^l w'^2\mathrm{d}x \quad (34)$$

Das Wirkungsfunktional S setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \big\{K - U\big\}\mathrm{d}t \quad (35)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \big\{\frac{1}{2}\mu \int_0^l \dot{w}^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}F_s \int_0^l w'^2\mathrm{d}x\big\}\mathrm{d}t \quad (36)$$

$$= \frac{1}{2}\mu \underbrace{\iint_{t\,x} \dot{w}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}_{S_K} - \frac{1}{2}F_s \underbrace{\iint_{t\,x} w'^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}_{S_U} \quad (37)$$

Und für die Variation gilt

$$\delta S = \delta\big\{\frac{1}{2}\mu S_K - \frac{1}{2}F_s S_U\big\} \quad (38)$$

$$\delta S = \frac{1}{2}\mu\delta S_K - \frac{1}{2}F_s\delta S_U \quad (39)$$

Nun können die Variationen von S_K und S_U nach Definition der Variation berechnet werden:

$$\delta S_K = \iint_{t\,x} 2\dot{w}\delta\dot{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (40)$$

$$\delta S_U = \iint_{t\,x} 2w'\delta w'\mathrm{d}x\mathrm{d}t \quad (41)$$

Damit erhält man insgesamt

$$\boxed{\delta S = \mu \iint_{t\,x} \dot{w}\delta\dot{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - F_s \iint_{t\,x} w'\delta w'\mathrm{d}x\mathrm{d}t} \quad (\delta S)$$

Berechnen von $\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \dot{w}\delta\dot{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ **usw.**

w und δw und ihre Zeitableitungen sind orts- und zeitabhängige Funktionen: $w = w(x,t), \delta w = \delta w(x,t)$. Der Term $\int_{t_1}^{t_2} \dot{w}\delta\dot{w}dt$ soll durch partielle Integration berechnet werden mit dem Ziel, die Variation selbst (also δw) zu faktorisieren. Dies geschieht so:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{w}\delta\dot{w}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \big[(\dot{w}\delta w)^{\cdot} - \ddot{w}\delta w\big]\mathrm{d}t \quad (42)$$

$$= (\dot{w}\delta w)(t_2) - (\dot{w}\delta w)(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w}\delta w\mathrm{d}t \quad (43)$$

$$= \dot{w}(t_2)\delta w(t_2) - \dot{w}(t_1)\delta w(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w}\delta w\mathrm{d}t \quad (44)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{w}\delta\dot{w}\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \ddot{w}\delta w \quad \text{(part t)}$$

weil $\delta w(x,t_1) = \delta w(x,t_1) = 0$. Von den Variationen $\delta w(x,t)$ fordert man also, dass sie zur Anfangs- und Endzeit (t_1 und t_2) des Prozesses überall ($\forall x$) verschwinden.

Nun soll der Term $\int\limits_0^l w'\delta w' \mathrm{d}x$ ebenfalls mit partieller Integration berechnet werden, damit auch hier δw faktorisiert werden kann:

$$\int\limits_0^l w'\delta w' \mathrm{d}x = \int\limits_0^l \left[(w'\delta w)' - w''\delta w\right] \mathrm{d}x \tag{45}$$

$$= (w'\delta w)(l) - (w'\delta w)(0) - \int\limits_0^l w''\delta w \mathrm{d}x \tag{46}$$

$$= w'(l)\delta w(l) - w'(0)\delta w(0) - \int\limits_0^l w''\delta w \mathrm{d}x \tag{47}$$

$$\int\limits_0^l w'\delta w' \mathrm{d}x = -\int\limits_0^l w''\delta w \mathrm{d}x \tag{part x}$$

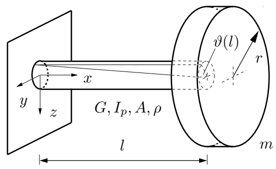
Denn die geometrischen Randbedingungen sollen auch von den Variationen erfüllt werden, d.h. $\delta w(0) = \delta w(l) = 0$.

(part t) und (part x) können nun in (δS) eingesetzt werden.

Hausaufgaben

Aufgabe 81

Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse.



(a) Wie lautet die *geometrische* Randbedingung für das System?

(b) Berechnen Sie die kinetische Energie K und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamische* Randbedingung her.

Geg.: l, m, G, I_p, A, ρ, r

(a) Geometrische Randbedingung: An der Einspannung ist der Verdrehwinkel Null!

$$\vartheta(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{48}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\vartheta(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{49}$$

(b) Lagrange-Funktion $L = K - U$ mit ...

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left\{ \rho I_p \dot{\vartheta}^2 + \underbrace{J_m}_{\frac{m}{2}r^2} \dot{\vartheta}^2 \delta(x-l) \right\} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \rho I_p \dot{\vartheta}^2 \mathrm{d}x + \frac{m}{4} r^2 \dot{\vartheta}^2(l,t) \tag{50}$$

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_0^l G I_p {\vartheta'}^2 \mathrm{d}x \tag{51}$$

(c) Da keine nicht konservativen Kräfte zu berücksichtigen sind, folgt $\delta A = 0$ und damit das Prinzip von Hamilton in der Form:

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} (K - U) \mathrm{d}t = 0 \tag{52}$$

(d) Die Bewegungsdifferenzialgleichung und die dynamischen Randebedingungen fallen nach Ausführung der Variation ab: Aus Gleichung (52) folgt:

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2}\int\limits_0^l \rho I_p \dot{\vartheta}^2 \mathrm{d}x + \frac{m}{4} r^2 \dot{\vartheta}^2(l,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^l G I_p {\vartheta'}^2 \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t = 0 \tag{53}$$

Variation unter die Integrale ziehen:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2}\int\limits_0^l \rho I_p \delta\dot{\vartheta}^2 \mathrm{d}x + \frac{m}{4} r^2 \delta\dot{\vartheta}^2(l,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^l G I_p \delta{\vartheta'}^2 \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}t = 0 \tag{54}$$

Durchführen der Variation:

$$\delta\dot{\vartheta}^2 = 2\dot{\vartheta}\delta\dot{\vartheta} \tag{55}$$

$$\delta{\vartheta'}^2 = 2\vartheta'\delta\vartheta' \tag{56}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^l \rho I_p\dot{\vartheta}\delta\dot{\vartheta}\mathrm{d}x + \frac{m}{2}r^2\dot{\vartheta}(l,t)\delta\dot{\vartheta}(l,t) - \int_0^l GI_p\vartheta'\delta\vartheta'\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{57}$$

Im Folgenden werden die drei Terme aus Gleichung (57) gesondert betrachtet. Dabei werden, um $\delta\vartheta$ zu faktorisieren partielle Integrationen durchgeführt.

I:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho I_p\dot{\vartheta}\delta\dot{\vartheta}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^l \underbrace{\left[\rho I_p\dot{\vartheta}\delta\vartheta\right]_{t_0}^{t_1}}_{\substack{=0,\text{ siehe}\\ \text{Voraussetzungen}\\ \text{von Hamilton}}}\mathrm{d}x - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho I_p\ddot{\vartheta}\delta\vartheta\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{58}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho I_p\ddot{\vartheta}\delta\vartheta\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{59}$$

II:

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{2}r^2\dot{\vartheta}(l,t)\delta\dot{\vartheta}(l,t)\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{m}{2}r^2\dot{\vartheta}(l,t)\delta\vartheta(l,t)\right]_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{2}r^2\ddot{\vartheta}(l,t)\delta\vartheta(l,t)\mathrm{d}t \tag{60}$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1}\frac{m}{2}r^2\ddot{\vartheta}(l,t)\delta\vartheta(l,t)\mathrm{d}t \tag{61}$$

III:

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l GI_p\vartheta'\delta\vartheta'\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_{t_0}^{t_1}\left[GI_p\vartheta'\delta\vartheta\right]_0^l\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l GI_p\vartheta''\delta\vartheta\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{62}$$

$$\left.\begin{matrix}\vartheta(0)=0\\ \Downarrow\\ \delta\vartheta(0)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \quad = -\int_{t_0}^{t_1}GI_p\vartheta'(l,t)\delta\vartheta(l,t)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l GI_p\vartheta''\delta\vartheta\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{63}$$

Alles wieder ins Prinzip von Hamilton einsetzen und sortieren:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left(-\rho I_p\ddot{\vartheta} + GI_p\vartheta''\right)\delta\vartheta\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\left[-\frac{m}{2}r^2\ddot{\vartheta}(l,t) - GI_p\vartheta'(l,t)\right]\delta\vartheta(l,t)\mathrm{d}t = 0 \tag{64}$$

Da die Variationen $\delta\vartheta$ und $\delta\vartheta(l,t)$ unabhängig voneinander sind, müssen die Terme davor verschwinden, um die Gleichung zu erfüllen:

$$\overset{(64)}{\Rightarrow} \qquad \rho I_p\ddot{\vartheta} = GI_p\vartheta'' \tag{65}$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{\vartheta} = c^2\vartheta'' \qquad \text{mit} \qquad c^2 = \frac{G}{\rho} \tag{66}$$

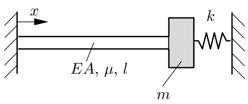
Das ist die Bewegungsdifferentialgleichung.

$$\overset{(64)}{\Rightarrow} \qquad -\frac{m}{2}r^2\ddot{\vartheta}(l,t) - GI_p\vartheta'(l,t) = 0 \tag{67}$$

Das ist die dynamische Randbedingung, welche man auch aus dem Freischnitt der Einzelmasse hätte herleiten können.

Aufgabe 86

Ein massebehafteter elastischer Stab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ, Länge l) ist am linken Rand ($x = 0$) fest eingespannt und trägt am rechten Rand ($x = l$) eine Punktmasse m. Die Punktmasse ist außerdem über eine Feder (Steifigkeit k) an die Umgebung gekoppelt.



Die Feder sei entspannt, wenn der Stab unverformt ist. Es werden ausschließlich Längsschwingungen $u(x,t)$ betrachtet.

(a) Wie lautet die *geometrische* Randbedingung für das System?

(b) Wie berechnen sich die kinetische Energie K und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem?

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamische* Randbedingung her.

Geg.: m, k, l, $EA = \text{konst.}$, $\mu := \rho A = \text{konst.}$,

(a) Geometrische Randbedingung:

$$u(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{68}$$

$$\Rightarrow \quad \delta u(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{69}$$

(b) Kinetische und potenzielle Energie des Systems:

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{u}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m\dot{u}|_{(l,t)}^2 \tag{70}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EAu'^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}ku|_{(l,t)}^2 \tag{71}$$

$$\tag{72}$$

(c) Aufstellen des Prinzips von Hamilton:

$$\delta S = 0 \tag{73}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \delta A\mathrm{d}t = 0 \tag{PdkW}$$

$$\text{mit } L = K - U \quad \text{und} \quad \delta A = 0 \tag{74}$$

(d) Auswertung des Prinzips von Hamilton liefert die Bewegungsdifferenzialgleichung und die dynamische Randbedingung:

Die folgenden Abkürzungen werden eingeführt:

$$S_\mathrm{K} := \frac{1}{2}\mu \int_t\int_x \dot{u}^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{75}$$

$$S_\mathrm{m} := \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}|_l^2 \mathrm{d}t \tag{76}$$

$$S_\mathrm{U} := \frac{1}{2}EA \int_t\int_x u'^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{77}$$

$$S_\mathrm{k} := \frac{1}{2}k \int_{t_1}^{t_2} u|_l^2 \mathrm{d}t \tag{78}$$

Variationen:

$$\delta S_\mathrm{K} := \mu \int_t\int_x \dot{u}\delta\dot{u} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{79}$$

$$\delta S_\mathrm{m} := m \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}|_l \delta\dot{u}|_l \mathrm{d}t \tag{80}$$

$$\delta S_\mathrm{U} := EA \int_t\int_x u'\delta u' \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{81}$$

$$\delta S_\mathrm{k} := k \int_{t_1}^{t_2} u|_l \delta u|_l \mathrm{d}t \tag{82}$$

Partielle Integrationen mit dem Ziel, δu zu faktorisieren::

$$\delta S_\mathrm{K}\colon \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}\delta\dot{u}\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}\delta u\mathrm{d}t \tag{83}$$

$$\delta S_\mathrm{m}\colon \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}|_l\delta\dot{u}|_l\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}|_l\delta u|_l\mathrm{d}t \tag{84}$$

$$\delta S_\mathrm{U}\colon \int_0^l u'\delta u'\mathrm{d}x = -\int_0^l u''\delta u\mathrm{d}x + u'\delta u|_l - u'\delta u|_0 \tag{85}$$

Es wurde hier schon (in den ersten beiden der drei Gleichungen) ausgenutzt, dass die Variationen bei t_1 und t_2 Null sind.

Jetzt kommt das große Einsetzen:

$$S = S_\mathrm{K} + S_\mathrm{m} - S_\mathrm{U} - S_\mathrm{k} \tag{86}$$

$$\delta S = \delta S_\mathrm{K} + \delta S_\mathrm{m} - \delta S_\mathrm{U} - \delta S_\mathrm{k} \tag{87}$$

wird in (PdkW) eingesetzt. Außerdem beachtet man noch die geometrische Randbedingung $u(0) = 0$ und daraus resultierend $\delta u(0) = 0$. Alles zusammen liefert:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l (-\mu\ddot{u} + EAu'')\delta u\mathrm{d}x ... \right.$$

$$\left. ...(EAu'|_l + ku|_l + m\ddot{u}|_l)\delta u|_l \right] \mathrm{d}t \tag{88}$$

Und daraus folgt die Bewegungsdifferentialgleichung und die dynamische Randbedingung bei $x = l$:

$$\mu\ddot{u} = EAu'' \tag{89}$$

$$EAu'|_l + ku|_l + m\ddot{u}|_l = 0 \tag{90}$$