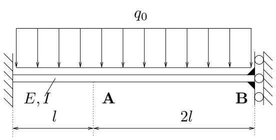
Tutorium

Aufgabe 71

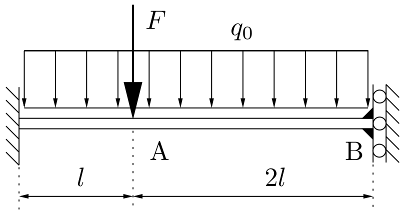
Gegeben ist die nebenstehend skizzierte Konstruktion.

Berechnen Sie unter Verwendung des zweiten Satzes von Castigliano die Durchsenkung an der Stelle **A**.

Geg.: l, q_0, E, I, der Balken sei schubstarr

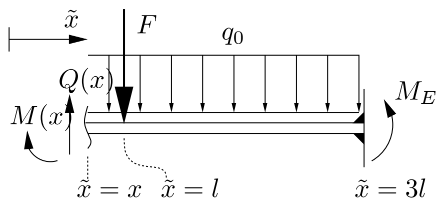


1. An der Stelle, an der die Verschiebung bestimmt werden soll, wird eine fiktive Kraft F eingeführt.



Da das System statisch unbestimmt ist, wird der Einfluss der Führung am rechten Ende durch das Einspannmoment M_E beschrieben. Die dort angreifende Lagerkraft hat keinen Einfluss auf das Problem und wird daher ignoriert. Alternativ könnte auch diese Bindung durch eine Normalkraft ersetzt werden.

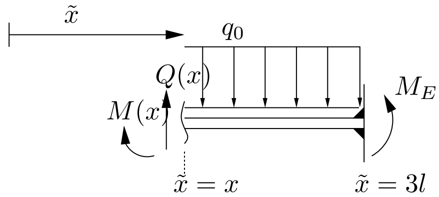
Zwischen der festen Einspannung und dem Punkt A hat dann die Querkraft den Verlauf



$0 < x < l$ Längskräfte der Übersicht wegen weggelassen

$$Q(x) = \int_x^{3l} q_0 d\tilde{x} + F = q_0(3l - x) + F, \tag{1}$$

und zwischen den Stellen A und B



$l < x < 3l$ Längskräfte weggelassen

$$Q(x) = \int_x^{3l} q_0 d\tilde{x} = q_0(3l - x). \tag{2}$$

Damit hat das Biegemoment im Bereich $0 < x < l$ den Verlauf:

$$\begin{aligned} M(x) &= M_E - \int_x^{3l} Q(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= M_E - \int_x^{3l} q_0(3l - \tilde{x}) d\tilde{x} - \int_x^{l} F d\tilde{x} \\ &= M_E - \frac{1}{2} q_0 l^2 \Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9 \Big] \\ &\qquad - Fl\Big(1 - \frac{x}{l}\Big) \end{aligned} \tag{3}$$

und im Bereich $l < x < 3l$:

$$\begin{aligned} M(x) &= M_E - \int_x^{3l} Q(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= M_E - \int_x^{3l} q_0(3l - \tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= M_E - \frac{1}{2} q_0 l^2 \Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9 \Big] \end{aligned} \tag{4}$$

Beachte: Im Ergebnis für die Schnittlasten steckt noch das bisher unbekannte Einspannmoment M_E am rechten Ende.

3. Formänderungsenergie des Systems

$$U = \int_0^{3l} \frac{1}{2} \frac{M(x)^2}{EI} dx \tag{5}$$

4. Bestimmung der noch unbekannten Lagerreaktionen (Einspannungsmoment rechts):

Der Satz von Castigliano sagt, dass die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach der gesuchten Lagerreaktion gleich der dazugehörigen Verschiebung, also gleich Null ist. Mit $\varphi \approx w'$ folgt

$$\varphi\,(x = 3l) = 0 = \frac{\partial U}{\partial M_E} \tag{6}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial M_E} \Big(\int_0^{3l} \frac{1}{2} \frac{M(x)^2}{EI} dx \Big) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{3l} \frac{1}{EI} M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial M_E} dx \\ &= \int_0^{l} \frac{1}{EI} \Big[M_E - \frac{1}{2} q_0 l^2 \Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9 \Big) \\ &\qquad - Fl\Big(1 - \frac{x}{l}\Big) \Big] dx \\ &+ \int_l^{3l} \frac{1}{EI} \Big[M_E - \frac{1}{2} q_0 l^2 \Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 9 \Big) \Big] dx \\ &= \frac{1}{EI} \Big[3l\, M_E - \frac{9}{2} q_0\, l^3 - \frac{1}{2} F l^2 \Big] \end{aligned} \tag{8}$$

aufgelöst nach M_E:

$$M_E(x) = \frac{3}{2} q_0 l^2 + \frac{1}{6} Fl \tag{9}$$

Dann lauten die Schnittlasten im Bereich $0 < x < l$:

$$M(x) = -\frac{1}{2} q_0 l^2 \Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6 \Big] - Fl\Big(\frac{5}{6} - \frac{x}{l}\Big) \tag{10}$$

und im Bereich $l < x < 3l$:

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0 l^2\Big[\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big] + \frac{1}{6}Fl \qquad (11)$$

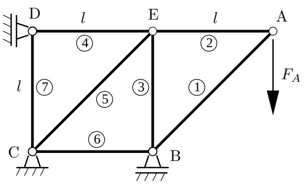
5. Durchsenkung am Punkt A: Der Satz von Castigliano sagt, daß die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach der fiktiven Kraft F die Verschiebung an dieser Stelle ergibt. Die fiktive Kraft wird dabei nach der Differentiation zu Null gesetzt.

$$\begin{aligned}
w(x=l) \;&=\; \frac{\partial U}{\partial F}\Big|_{F=0} &(12)\\
&= \frac{\partial}{\partial F}\Big(\int_0^{3l}\frac{1}{2}\frac{M(x)^2}{EI}dx\Big)\Big|_{F=0}\\
&= \int_0^{3l}\frac{1}{EI}M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial F}dx\Big|_{F=0}\\
&= \int_0^{l}\frac{1}{EI}\Big[-\frac{1}{2}q_0 l^2\Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big)\\
&\qquad - Fl\Big(\frac{5}{6} - \frac{x}{l}\Big)\Big]\Big[-l\Big(\frac{5}{6} - \frac{x}{l}\Big)\Big]dx\Big|_{F=0}\\
&+ \int_l^{3l}\frac{1}{EI}\Big[-\frac{1}{2}q_0 l^2\Big(\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 - 6\frac{x}{l} + 6\Big)\\
&\qquad + \frac{1}{6}Fl\Big]\Big[\frac{1}{6}l\Big]dx\Big|_{F=0}\\
&= \frac{1}{EI}\,l^3\Big\{q_0 l\frac{75}{72} + F\frac{1}{4}\Big\}\Big|_{F=0} &(13)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow w(x=l) = \frac{25}{24}\,\frac{q_0 l^4}{EI} \qquad (14)$$

Aufgabe 75

Das abgebildete Fachwerk aus 7 Stäben mit der Dehnsteifigkeit EA ist innerlich statisch bestimmt. Aufgrund der Lagerung in den Punkten B, C, D ist das Fachwerk äußerlich einfach statisch überbestimmt.



Die (komplementäre) Formänderungsenergie eines longitudinal gedehnten Stabes beträgt:

$$U_{\text{Stab}} = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{N^2}{EA}dx$$

(a) Machen Sie die Lagerung des Fachwerks statisch bestimmt, indem Sie das Lager bei B entfernen und dort die Lagerkraft F_B einführen. Bestimmen Sie dann die Kräfte in den Stäben, z.B. indem Sie die Knoten A, B und E freischneiden.

(b) Berechnen Sie nun die (komplementäre) Formänderungsenergie U des Fachwerkes als Funktion der Kräfte F_A und F_B.

(c) Nutzen Sie im folgenden die (komplementäre) Formänderungsenergie

$$U = \frac{l}{EA}\left[aF_A^2 + bF_AF_B + cF_B^2\right] ,$$

mit den bekannten Konstanten a, b und c. Berechnen Sie die Lagerkraft F_B.

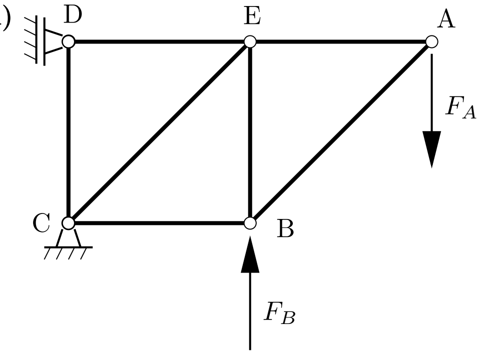
(d) Wie groß ist die statische Durchsenkung in vertikaler Richtung u_A am Punkt A?

(e) An der Stelle A sei nun statt der Kraft F_A eine Punktmasse m angebracht. Die Masse der Stäbe soll gegenüber dieser Punktmasse vernachlässigt werden.

Betrachtet werden ausschließlich vertikale Schwingungen der Punktmasse m. Das Fachwerk verhält sich dann wie eine lineare Feder. Wie groß ist die Ersatzfedersteifigkeit? Welche Eigenkreisfrequenz hat das System?

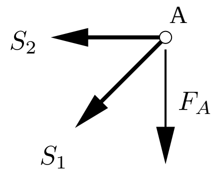
Geg.: F_A, l, EA, m

(a)



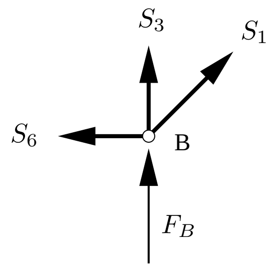
Stab 7 ist ein Nullstab (Betrachte Knoten D).

Knoten A:



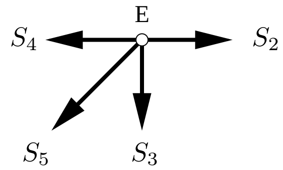
$$S_2 = F_A \qquad (15)$$
$$S_1 = -\sqrt{2}F_A \qquad (16)$$

Knoten B:



$$S_3 = F_A - F_B \qquad (17)$$
$$S_6 = -F_A \qquad (18)$$

Knoten E:



$$S_5 = \sqrt{2}(F_B - F_A) \qquad (19)$$
$$S_4 = 2F_A - F_B \qquad (20)$$

Alle Stabkräfte sind als Zugkräfte eingezeichnet.

(b)

$$U = \sum_{j=1}^{7}\int_0^{l_j}\frac{S_j^2}{2EA}dx \qquad (21)$$
$$= \frac{1}{2EA}\sum_{j=1}^{7}l_jS_j^2$$
$$l_2 = l_3 = l_4 = l_6 = l_7 = l$$
$$l_1 = l_5 = \sqrt{2}l$$

Alles einsetzen ergibt:

$$U = \frac{l}{EA}[F_A^2(\frac{7}{2} + 2\sqrt{2}) + ...$$
$$...F_B^2(1 + \sqrt{2}) - F_AF_B(3 + 2\sqrt{2})] \qquad (22)$$

(c)

$$U = \frac{l}{EA}(aF_A^2 + bF_AF_B + cF_B^2)$$

Forderung für Lager B (mit dem ersten Satz von Castigliano):

$$u_B = \frac{\partial U}{\partial F_B} = 0$$
$$\Longrightarrow bF_A + 2cF_B = 0$$
$$\Longrightarrow F_B = -\frac{b}{2c}F_A \tag{23}$$

(d) Einsetzen von F_B in die (komplementäre) Formänderungsenergie liefert

$$U = \frac{lF_A^2}{EA}(a - \frac{b^2}{4c}) \tag{24}$$
$$u_A = \frac{\partial U}{\partial F_A} = \frac{lF_A}{EA}(\frac{4ac - b^2}{2c}) \tag{25}$$

(e) Die Federsteifigkeit k berechnet sich aus $u_A = \frac{F_A}{k}$

$$k = \frac{EA}{l}(\frac{2c}{4ac - b^2}) \tag{26}$$

Bewegungsdifferentialgleichung (freie Schwingung)

$$m\ddot{u}_A + ku_A = 0$$

Eigenkreisfrequenz

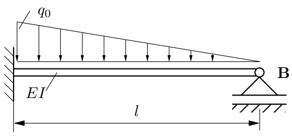
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{EA}{lm}(\frac{2c}{4ac - b^2})} \approx 0,42\sqrt{\frac{EA}{ml}} \tag{27}$$

Hausaufgaben

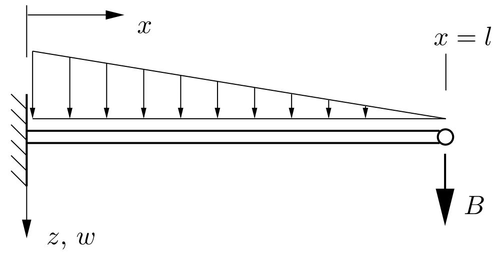
Aufgabe 72

Für den skizzierten schubstarren Träger mit der konstanten Biegesteifigkeit EI ist mittels des zweiten Satzes von Castigliano (genauer gesagt mit Hilfe des Satzes von Menabrea) die Lagerkraft an der Stelle **B** zu bestimmen.

Geg.: l, EI, q_0

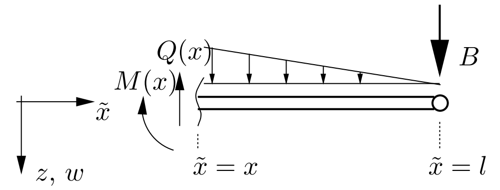


1. Ersetzen des Lagers durch eine (unbekannte) Kraft B.



2. Bestimmen der Schnittlastverläufe

$$q(x) = q_0\Big(1 - \frac{x}{l}\Big) \tag{28}$$



Momentengleichgewicht mit dem Schnittpunkt x als Bezugspunkt:

$$M(x) = -\int_x^l (\tilde{x} - x)q(\tilde{x})d\tilde{x} - B(l - x)$$

oder alternativ mit der Ersatzkraft F_q der Streckenlast bis zum Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} M(x) &= -F_q(x)\frac{l-x}{3} - B(l-x) \quad \Big| \; F_q(x) = \frac{l-x}{2}q(x) \\ &= \frac{q_0l^2}{2}\Big[\frac{1}{3}\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 - \Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + \Big(\frac{x}{l}\Big) - \frac{1}{3}\Big] \\ &\qquad + Bl\Big(\frac{x}{l} - 1\Big) \end{aligned} \tag{29}$$

3. (komplementäre) Formänderungsenergie des Systems:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M(x)^2}{EI}dx \tag{30}$$

4. Partielle Ableitung der (komplementären) Formänderungsenergie nach der anstelle des Lagers eingeführten Kraft B:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial B} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial B}\Big\{\int_0^l \frac{M(x)^2}{EI}dx\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{EI}\frac{\partial}{\partial B}\Big(M(x)^2\Big)dx \\ &= \int_0^l \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial B}dx \end{aligned} \tag{31}$$

Aus Gln. (29) erhalten wir

$$\frac{\partial M(x)}{\partial B} = l\Big(\frac{x}{l} - 1\Big) \tag{32}$$

5. Satz von Castigliano:

Ableitung der (komplementären) Formänderungsenergie nach der Kraft ergibt die Verschiebung an dieser Stelle.

Aufgrund der Lagerung ist die Verschiebung gleich Null. Mit Gln. (31), Gln.(32) und Gln. (29) ergibt sich:

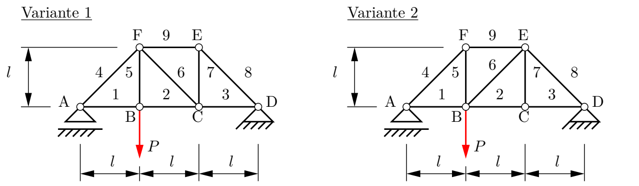
$$0 = \frac{\partial U}{\partial B} = \int_0^l \frac{1}{EI}\Big[\frac{q_0 l^2}{2}\Big(\frac{1}{3}\big(\frac{x}{l}\big)^3 - \big(\frac{x}{l}\big)^2 + \big(\frac{x}{l}\big) - \frac{1}{3}\Big) + Bl\Big(\frac{x}{l} - 1\Big)\Big] l\Big(\frac{x}{l} - 1\Big)dx \tag{33}$$

$$= \frac{1}{EI}\Big[\frac{q_0 l^4}{30} + B\frac{l^3}{3}\Big] \tag{34}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{q_0 l}{10} \tag{35}$$

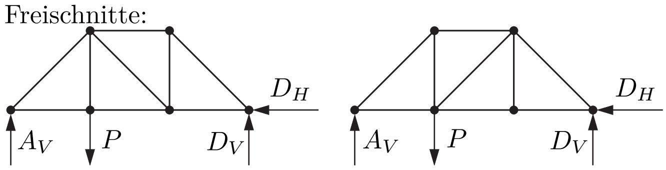
Aufgabe 77

Ein Fachwerk aus 9 Stäben ist in A und D gelagert. Im Punkt B wirkt eine vertikale Kraft P. Die Stäbe haben alle die gleiche Querschnittsfläche A und den gleichen E-Modul E.



Es werden zwei verschiedene Varianten vorgeschlagen (siehe Bild). Welche Variante ist zu wählen, wenn die vertikale Durchsenkung in B möglichst klein sein soll? Wie groß ist die Durchsenkung im besseren Fall?
Geg.: P, l, E, A

Freischnitte:



$$\sum F_h = 0 \Rightarrow \quad \underline{D_H = 0} \tag{36}$$

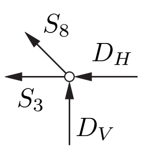
$$\Sigma M^D = 0 \Rightarrow \quad A_V \cdot 3l - P \cdot 2l = 0 \Rightarrow \underline{A_V = \frac{2}{3}P} \tag{37}$$

$$\Sigma M^A = 0 \Rightarrow \quad Pl - D_V \cdot 3l = 0 \Rightarrow \underline{D_V = \frac{1}{3}P} \tag{38}$$

<u>Bestimmen der Stabkräfte</u>

<u>Knotenschnitte:</u>

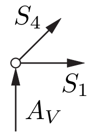
D:



$$\sum F_h = 0 \Rightarrow S_3 + D_H + \frac{S_8}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \underline{S_3 = \frac{P}{3}} \tag{39}$$

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow D_V + \frac{S_8}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \underline{S_8 = -\frac{\sqrt{2}}{3}P} \tag{40}$$

A:



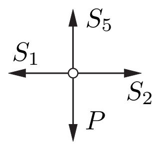
$$\sum F_v = 0 \Rightarrow \underline{S_4} = -\sqrt{2}A_V = \underline{-\frac{2\sqrt{2}}{3}P} \tag{41}$$

$$\sum F_h = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}S_4 + S_1 = 0 \Rightarrow \underline{S_1} = -\frac{S_4}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{2}{3}P} \tag{42}$$

Die Stabkräfte S_1, S_3, S_4, S_8 sind für beide Systeme gleich. Unterschiede gibt es bei den noch ausbleibenden:

<u>I Variante</u>

B:

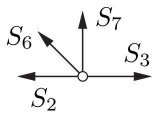


$$\sum F_h = 0 \Rightarrow S_2 = S_1 \tag{43}$$

$$\underline{S_2 = \frac{2}{3}P} \tag{44}$$

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow \underline{S_5 = P} \tag{45}$$

C:



$$\sum F_h = 0 \Rightarrow \frac{S_6}{\sqrt{2}} + S_2 - S_3 = 0 \tag{46}$$

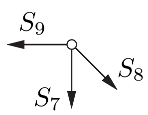
$$S_6 = \sqrt{2}\big(S_3 - S_2\big) \tag{47}$$

$$\underline{S_6 = -\frac{\sqrt{2}}{3}P} \tag{48}$$

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow S_7 + \frac{S_6}{\sqrt{2}} = 0 \tag{49}$$

$$\Rightarrow \underline{S_7} = -\frac{S_6}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{3}P} \tag{50}$$

E:

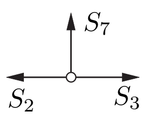


$$\sum F_h = 0 \Rightarrow \frac{S_8}{\sqrt{2}} - S_9 = 0 \tag{51}$$

$$\underline{S_9 = -\frac{P}{3}} \tag{52}$$

<u>II Variante</u>

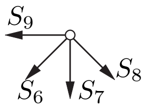
C:



$$\sum F_v = 0 \Rightarrow \underline{S_7 = 0} \tag{53}$$

$$\sum F_h = 0 \Rightarrow S_2 = S_3 \tag{54}$$

$$\underline{S_2 = \frac{P}{3}} \tag{55}$$

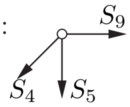
E: 

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow S_7 + \frac{S_8}{\sqrt{2}} + \frac{S_6}{\sqrt{2}} = 0 \quad (56)$$

$$\underline{S_6} = -S_8 = \underline{\frac{\sqrt{2}}{3}P} \quad (57)$$

$$\sum F_h = 0 \Rightarrow S_9 + \frac{S_6}{\sqrt{2}} - \frac{S_8}{\sqrt{2}} = 0 \quad (58)$$

$$\underline{S_9 = -\frac{2}{3}P} \quad (59)$$

F: 

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow \frac{S_4}{\sqrt{2}} + S_5 = 0 \quad (60)$$

$$\underline{S_5} = -\frac{S_4}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{2}{3}P} \quad (61)$$

<u>Formänderungsarbeit:</u>

$$W = \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{2} \int_0^{li} \frac{S_i^2}{E_i A_i} \mathrm{d}x_i \quad (62)$$

<u>Achtung:</u> $l_4 = l_6 = l_8 = \sqrt{2}\, l$ (63)

<u>I Variante:</u>

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{I}} &= \frac{1}{2EA} \int_0^l \Big(\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \Big) P^2 \mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2EA} \int_0^{\sqrt{2}\,l} \Big(\frac{8}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \Big) P^2 \mathrm{d}x \\ &= \underline{\underline{\frac{P^2 l}{2EA} \Big(\frac{20}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{2} \Big)}} \end{aligned} \quad (64)$$

<u>II Variante:</u>

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{II}} &= \frac{1}{2EA} \int_0^l \Big(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \Big) P^2 \mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2EA} \int_0^{\sqrt{2}\,l} \Big(\frac{8}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \Big) P^2 \mathrm{d}x \\ &= \underline{\underline{\frac{P^2 l}{2EA} \Big(\frac{14}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{2} \Big)}} \end{aligned} \quad (65)$$

<u>Verschiebung bei B:</u>

<u>I Variante:</u>

$$\frac{\partial W_{\mathrm{I}}}{\partial P} = u_{\mathrm{I\,B}} \quad (66)$$

$$\underline{\underline{u_{\mathrm{I\,B}} = \frac{Pl}{3EA} \Big(\frac{20}{3} + 4\sqrt{2} \Big)}} \quad (67)$$

<u>II Variante:</u>

$$\frac{\partial W_{\mathrm{II}}}{\partial P} = u_{\mathrm{II\,B}} \quad (68)$$

$$\underline{\underline{u_{\mathrm{II\,B}} = \frac{Pl}{3EA} \Big(\frac{14}{3} + 4\sqrt{2} \Big)}} \quad (69)$$

Die Variante II ist zu wählen, da hier die geringere Verschiebung im Punkt B vorliegt. Dass sich diese Berechnung lohnt, zeigt die Tatsache, dass die Absenkung im 2. Fall nur ca. 84 % des 1. Falls beträgt!