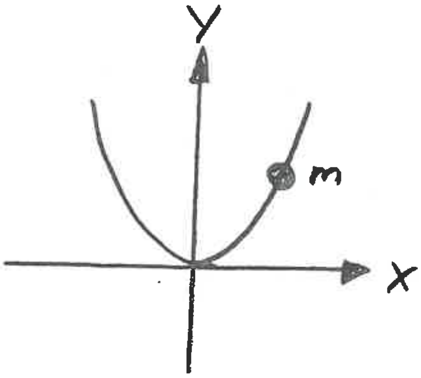
Nov. 2007
HcS

Aufgabe 38

Gegeben: $y = a x^2$



$\downarrow g$

Kinetische Energie: $K = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

Potentielle Energie: $U = m g y$

Dissipationsfunktion: $D = \mu N \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

Nebenbedingung: $g = y - a x^2 = 0 \qquad (1)$

Lagrange-Funktion: $L = K - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \mu N \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2xa \quad \Big| \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \mu N \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Lagrange Glgn. 1. Art:

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + \mu N \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -\lambda 2 x a \equiv N_x \qquad (2)$$

$$m\ddot{y} + mg + \mu N \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \lambda \equiv N_y \qquad (3)$$

Einsetzen der Zwangsbedingung (1) in (2) und (3):

aus (1) $\Rightarrow$ $\dot{y} = 2ax\dot{x}$
$$\ddot{y} = 2a\dot{x}^2 + 2ax\ddot{x}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad m\ddot{x} + \mu N \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+4a^2x^2}\,|\dot{x}|} = -\lambda \cdot 2xa \equiv N_x \quad (4)$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad m \cdot 2a(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg + \mu N \frac{2ax\dot{x}}{\sqrt{1+4a^2x^2}\,|\dot{x}|} = \lambda \equiv N_y \quad (5)$$

Nun ist aber $N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{1+4x^2a^2}\,\lambda$ (*)

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \quad m\ddot{x} + \mu\lambda \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = -2\lambda a x \quad (6)$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \quad 2am(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg + \mu\, 2ax \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\lambda = \lambda \quad (7)$$

aus (6) $\Rightarrow$ $\lambda = \dfrac{-m\ddot{x}}{2xa + \mu(\operatorname{sgn}\dot{x})}$ (8) mit $\operatorname{sgn}\dot{x} = \dfrac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$

(8) in (7) liefert die Bewegungsdgl.:

$$\Rightarrow \quad 2am(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg + (\mu\, 2ax(\operatorname{sgn}\dot{x}) - 1) \cdot \frac{-m\ddot{x}}{2xa + \mu(\operatorname{sgn}\dot{x})} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2am(2xa + \mu(\operatorname{sgn}\dot{x}))(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg(2xa + \mu(\operatorname{sgn}\dot{x})) + \ldots$$
$$\ldots + (\mu\, 2ax(\operatorname{sgn}\dot{x}) - 1)(-m\ddot{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(1 + 4a^2x^2)\ddot{x} + [2xa + \mu(\operatorname{sgn}\dot{x})](2a\dot{x}^2 + g) = 0} \quad (9)$$

Bewegungsdgl.!

(8) in (*) liefert die Zwangskraft N

$$N = -\sqrt{1+4x^2a^2}\,\frac{m\ddot{x}}{2xa + \mu(\operatorname{sgn}\dot{x})}$$

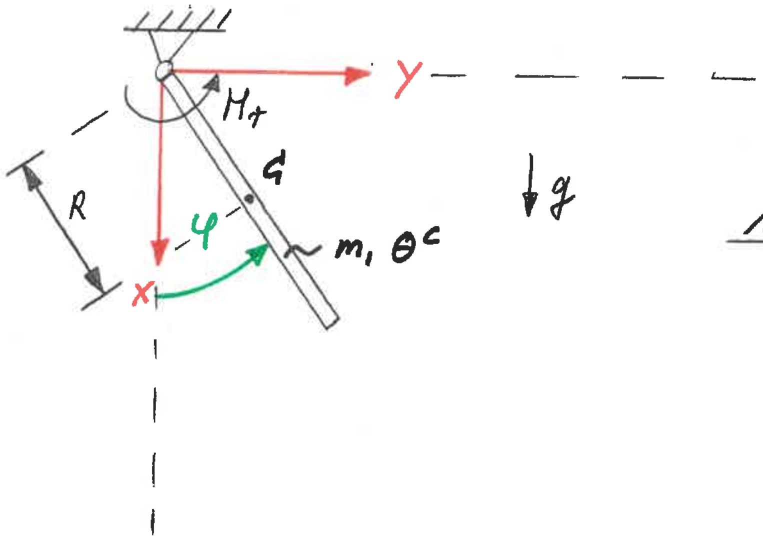
Hierin kann man noch die Beschleunigung mittels (9) eliminieren $\Rightarrow$

$$\boxed{N = +\sqrt{1+4x^2a^2} \cdot m \cdot \frac{2a\dot{x}^2 + g}{1 + 4a^2x^2} = \frac{(2a\dot{x}^2 + g)m}{\sqrt{1+4a^2x^2}}} \quad (10)$$

Nov. 2007
Heß

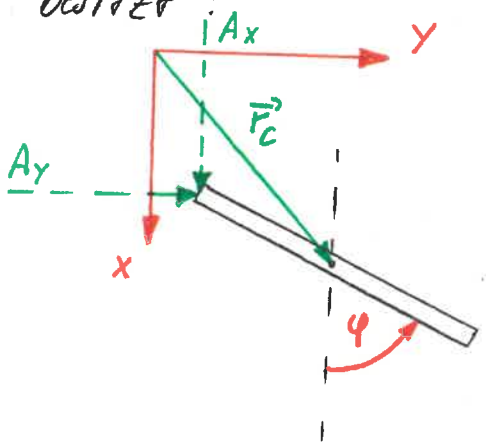
Aufgabe 40

Gegeben: $m, \Theta^c, R, g, M_r = -r_\varphi \dot{\varphi}$



Achtung: Mit G ist hier der Massenmittelpunkt der Stange bezeichnet

(a) Zunächst sollen kartesische Koordinaten herangezogen werden, um sowohl die Bewegungsdgl. als auch die Komponenten der Lagerkräfte zu ermitteln. Dazu müssen wir zunächst die Lagrangefunktion für das "befreite" System ermitteln, welches 3 Fhg. besitzt:



Kinetische Energie:

$$K(x,y,\varphi) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}\Theta^c\dot{\varphi}^2 \quad (1)$$

Potentielle Energie:

$$U(x) = -mgx \quad (2)$$

Das linear viskose Reibmoment wollen wir über die Dissipationsfunktion "einbauen":

$$D = \frac{1}{2} r_\varphi \dot{\varphi}^2 \quad (3)$$

Lagrange-Funktion:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}\Theta^c\dot{\varphi}^2 + mgx \quad (4)$$

Nebenbedingungen:

Das "wahre" System hat nur einen Fhg

$\Rightarrow$ es müssen zwei Zwangsbedingungen bestehen:

$$g_1(\varphi, x) = x - R\cos\varphi = 0 \qquad (5)$$

$$g_2(\varphi, y) = y - R\sin\varphi = 0 \qquad (6)$$

Lagrangegleichungen 1. Art:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot q_i} = \tilde{Q}_i + \underbrace{\sum_{k=1}^{2} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i}}_{= Q_i^z \text{ : general. Zwangskräfte}} \qquad (7)$$

$q_1 = x$:

$$m\ddot x - mg = \lambda_1 \equiv A_x \qquad (8)$$

$q_2 = y$:

$$m\ddot y = \lambda_2 \equiv A_y \qquad (9)$$

$q_3 = \varphi$:

$$\Theta^c \ddot\varphi + r_\varphi \dot\varphi = \lambda_1 R\sin\varphi - \lambda_2 R\cos\varphi \qquad (10)$$

Aus den Nebenbedingungen (5) und (6) folgt:

$$\ddot x = -R\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - R\sin\varphi\,\ddot\varphi \qquad (11)$$

$$\ddot y = -R\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + R\cos\varphi\,\ddot\varphi \qquad (12)$$

Einsetzen von (11) in (8) und (12) in (9) liefert

$$A_x \equiv \lambda_1 = -mR(\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \sin\varphi\,\ddot\varphi) - mg \qquad (13)$$

$$A_y \equiv \lambda_2 = -mR(\sin\varphi\,\dot\varphi^2 - \cos\varphi\,\ddot\varphi) \qquad (14)$$

(13) und (14) in (10) $\Rightarrow$

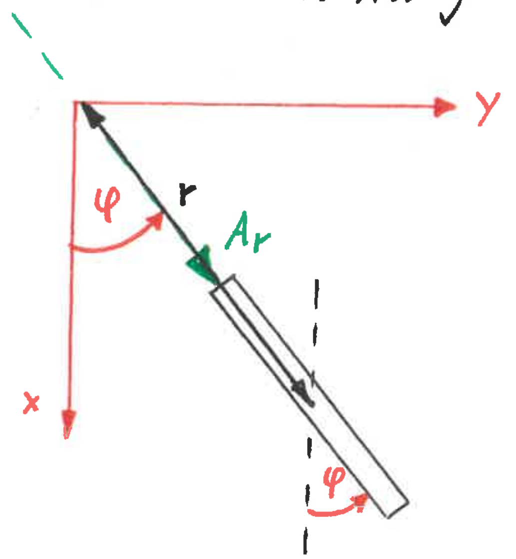
$$\Theta^c\ddot{\varphi} + r_\varphi\dot{\varphi} = -mR^2\sin\varphi\,(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}) - mgR\sin\varphi$$
$$+ mR^2\cos\varphi\,(\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\,\ddot{\varphi})$$

$$\Theta^c\ddot{\varphi} + r_\varphi\dot{\varphi} = -mR^2\ddot{\varphi} - mgR\sin\varphi$$

$$\underline{\underline{(\Theta^c + mR^2)\ddot{\varphi} + r_\varphi\dot{\varphi} + mgR\sin\varphi = 0}} \qquad (15)$$

mit (13), (14) und (15) sind sowohl die Zwangskraftkomponenten A_x und A_y als auch die Bewegungsdifferentialgleichung bestimmt!

(b) Nun sollen nochmals die Lagrangegleichungen 1. Art aufgestellt werden, allerdings soll lediglich die Komponente der Lagerkraft in radiale Richtung bestimmt werden. $\varphi(t)$ soll daher bereits die reine Bewegungskoordinate sein, d.h. wir denken uns eine in radiale Richtung freie Bewegung:



__Achtung__:
Die Komponente A_φ können wir so nicht ermitteln. Dazu müßten wir auch eine Verrückung in φ-Richtung zulassen, d.h. einen weiteren Winkel einführen (Dies ist nicht Gegenstand der Aufgabe, kann aber natürlich in der Sprechstunde diskutiert werden!)

<u>Kinetische Energie:</u>

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \quad + \frac{1}{2} \Theta^c \dot{\varphi}^2 \qquad (16)$$

<u>Potentielle Energie:</u>

$$U = -mgr\cos\varphi \qquad (17)$$

Die Dissipationsfunktion haben wir bereits in (3) bestimmt.

$$D = \frac{1}{2} r_\varphi \dot{\varphi}^2$$

<u>Lagrange - Funktion:</u>

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} \Theta^c \dot{\varphi}^2 + mgr\cos\varphi \quad (18)$$

<u>Nebenbedingung:</u>

Hier liegt nur eine vor, da lediglich r variiert wurde, während die Balkenachse stets in Richtung des Ortsvektors zum Massenmittelpunkt G weist:

$$g(r) = r - R = 0 \qquad (19)$$

<u>Lagrange - Glgn. 1. Art:</u>

<u>$q_1 = r$:</u>

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi = \lambda \equiv A_r \qquad (20)$$

<u>$q_2 = \varphi$:</u>

$$(\Theta^c + mr^2)\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr\sin\varphi + r_\varphi \dot{\varphi} = 0 \quad (21)$$

Nun wird wiederum die Zwangsbedingung (19) genutzt:

$$r = R \;\Rightarrow\; \dot{r} = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{r} = 0 \qquad (22)$$

(22) in (20) und (21) liefert die radiale Komponente der Lagerkraft, sowie die Bewegungsdgl.:

$$A_\vartheta \equiv \lambda = - m R \dot{\varphi}^2 - m g \cos\varphi \qquad (23)$$

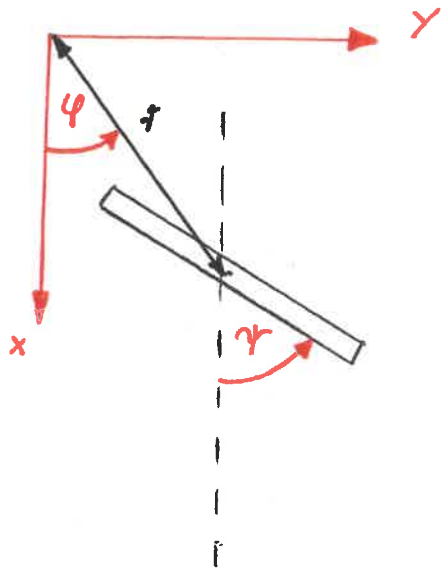
$$(\Theta^c + m R^2)\, \ddot{\varphi} + m g R \sin\varphi + r_\varphi\, \dot{\varphi} = 0 \qquad (24)$$

Man vergleich (24) mit (15).

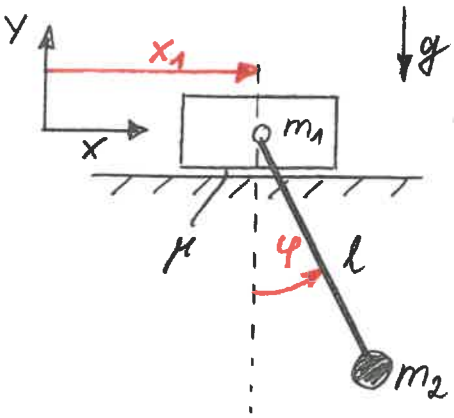
A_ϑ nach (23) erhält man auch mittels (13) und (14)

$$A_\vartheta = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi$$

Übrigens A_φ ist nicht Null! Wir wollen es lediglich nicht ermitteln. Untere Skizze zeigt, wie man fiktiv verrücken müßte, um es zu berechnen:

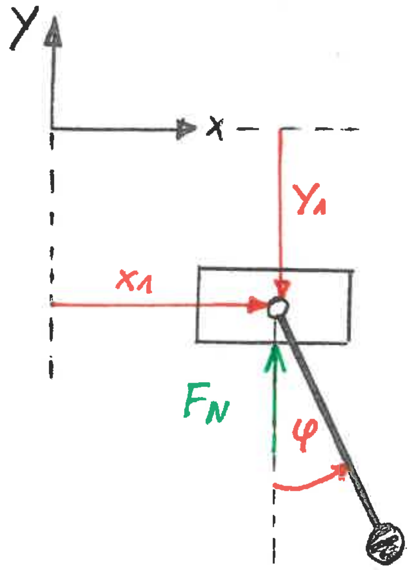


Aufgabe 44:



Zwischen Klotz und Unterlage besteht Reibung nach Coulomb: $F_R = \mu F_N$
Die Normalkraft F_N ist darin eine unbekannte Zwangskraft, weshalb die Lagrange-Gleichungen 1. Art zur Anwendung kommen, um die Bewegungsglgn. aufstellen zu können.

Überführung des Systems in ein Ersatzsystem, bei welchem sich der Klotz auch translatorisch in vertikale Richtung bewegen kann (eine Drehung sei vereinfacht ausgeschlossen).
Das Ersatzsystem hat demnach 3 Freiheitsgrade



Kinematik des Ersatzsystems:

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y \quad (\text{in der Skizze ist } y_1 < 0)$$
$$\vec{v}_1 = \dot{x}_1 \vec{e}_x + \dot{y}_1 \vec{e}_y$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + l \sin\varphi \, \vec{e}_x - l \cos\varphi \, \vec{e}_y$$
$$\vec{v}_2 = (\dot{x}_1 + l \cos\varphi \, \dot{\varphi}) \vec{e}_x + (\dot{y}_1 + l \sin\varphi \, \dot{\varphi}) \vec{e}_y$$

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x}_1 + l \cos\varphi \, \dot{\varphi})^2 + (\dot{y}_1 + l \sin\varphi \, \dot{\varphi})^2 \right]$$
$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2)(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2 (l \dot{x}_1 \cos\varphi \, \dot{\varphi} + l \dot{y}_1 \sin\varphi \, \dot{\varphi}) + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2$$

Potentielle Energie:

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g (y_1 - l \cos\varphi)$$

Lagrange-Funktion:

$$L = K - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2 l \dot{\varphi} (\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{y}_1 \sin\varphi) + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 - (m_1 + m_2) g y_1 + m_2 g l \cos\varphi$$

Dissipationsfunktion:

$$D = \mu |F_N| \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}$$

Zwangsbedingung: $g(x_1, y_1, \varphi) = y_1 = 0$

Lagrangegleichungen 1. Art: (General. Restkräfte sind nicht vorhanden)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = Q^z_{x_1}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) + \mu |F_N| \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y_1} = Q^z_{y_1}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + m_2 l(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \sin\varphi\, \ddot{\varphi}) + (m_1 + m_2) g + \mu |F_N| \frac{\dot{y}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}} = \lambda \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \varphi} = Q^z_{\varphi}$$

$$m_2 l(\ddot{x}_1 \cos\varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin\varphi + \ddot{y}_1 \sin\varphi + \dot{y}_1 \dot{\varphi} \cos\varphi) + m_2 l^2 \ddot{\varphi}$$

$$- m_2 l \dot{\varphi}(-\dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{y}_1 \cos\varphi) + m_2 g l \sin\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 \cos\varphi + \ddot{y}_1 \sin\varphi + l\ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0 \quad (3)$$

Berücksichtigung der Nebenbedingung in (1) bis (3):

$$y_1 = 0 \Rightarrow \dot{y}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{y}_1 = 0$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) + \mu |F_N| \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) = 0 \quad (4)$$

mit $\operatorname{sgn}(\dot{x}_1) = \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|}$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad m_2 l(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \sin\varphi\, \ddot{\varphi}) + (m_1 + m_2) g = \lambda \quad (5)$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \ddot{x}_1 \cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0 \quad (6)$$

Virtuelle Arbeit der Normalkraft

$$\delta A = \vec{F}_N \cdot \delta \vec{r}_N = \vec{F}_N \cdot \delta \vec{r}_1 = F_N \vec{e}_y \cdot (\delta x_1 \vec{e}_x + \delta y_1 \vec{e}_y) = F_N \delta y_1$$

$$\Rightarrow \underline{Q^z_{Y_1} = F_N} \Rightarrow \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial Y_1} = F_N \Rightarrow \underline{\lambda = F_N} \quad (7)$$

(7) in (5) liefert: $$\underline{\underline{F_N = m_2 l(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}) + (m_1+m_2)g}} \quad (8)$$

Damit ist die Normalkraft bestimmt!

(8) in (4) einsetzen:

$$\boxed{\begin{aligned}&(m_1+m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) + \mu m_2 l(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \sin\varphi\,\ddot{\varphi})\,\mathrm{sgn}(\dot{x}_1)\\ &\qquad + \mu(m_1+m_2)g\cdot\mathrm{sgn}(\dot{x}_1) = 0\end{aligned}} \quad (9)$$

zudem war (6):

$$\boxed{\ddot{x}_1\cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0}$$

Die beiden Glgn. (9) stellen die Bewegungsdifferentialgleichungen des Originalsystems dar!