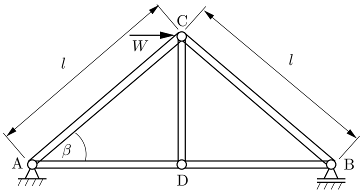
Tutorium

Aufgabe 13

Für das aus starren Stäben bestehende skizzierte Fachwerk unter der Belastung W sind folgende Größen mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu bestimmen:

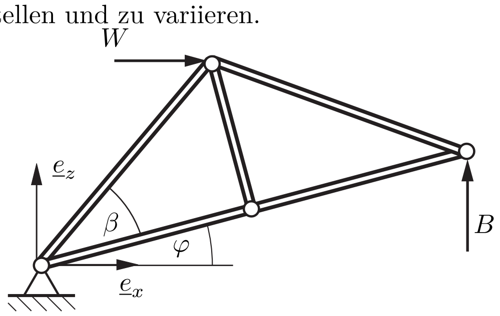
(a) Die Auflagerkraft im Punkt B,
(b) die Stabkraft S_{BC}.

Geg.: $W,\ l,\ \beta$



(a) Auflagerkraft B:

Bei komplizierteren Systemen, bei denen die virtuellen Verrückungen der Kraftangriffspunkte nicht sofort ersichtlich sind (bzw. deren Komponenten), ist es einfacher, die einzelnen Ortsvektoren vom Drehpunkt zu den Kraftangriffspunkten in der verschobenen Lage aufzustellen und zu variieren.



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_W = l\cos(\varphi+\beta)\underline{e}_x + l\sin(\varphi+\beta)\underline{e}_z \tag{1}$$
$$\underline{r}_B = 2l\cos\varphi\cos\beta\underline{e}_x + 2l\sin\varphi\cos\beta\underline{e}_z \tag{2}$$

Variation:

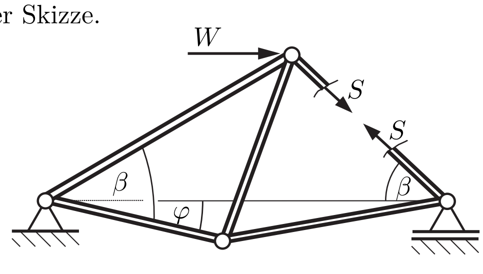
$$\delta\underline{r}_W = -\,l\sin(\varphi+\beta)\big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + l\cos(\varphi+\beta)\big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z$$
$$= -l\sin\beta\delta\varphi\underline{e}_x + l\cos\beta\delta\varphi\underline{e}_z \tag{3}$$
$$\delta\underline{r}_B = -\,2l\cos\beta\sin\varphi\big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x + 2l\cos\beta\cos\varphi\big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z$$
$$= 2l\cos\beta\delta\varphi\underline{e}_z \tag{4}$$

Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{W}\cdot\delta\underline{r}_W + \underline{B}\cdot\delta\underline{r}_B = 0 \tag{5}$$
$$(-Wl\sin\beta + 2Bl\cos\beta)\delta\varphi = 0 \tag{6}$$
$$(\delta\varphi\neq 0)\Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{W}{2}\tan\beta}} \tag{7}$$

(b) Stabkraft S_{BC}:

Die gedachte Verschiebung an der die freigemachte gesuchte Stabkraft virtuelle Arbeit verrichtet, entnehme man der Skizze.



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_W = l\cos(\beta-\varphi)\underline{e}_x + l\sin(\beta-\varphi)\underline{e}_z \tag{8}$$
$$\underline{r}_B = 2l\cos\varphi\cos\beta\underline{e}_x \tag{9}$$

Variation:

$$\delta\underline{r}_W = l\sin(\beta-\varphi)\big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x - l\cos(\beta-\varphi)\big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_z$$
$$= l\sin\beta\delta\varphi\underline{e}_x - l\cos\beta\delta\varphi\underline{e}_z \tag{10}$$
$$\delta\underline{r}_B = -\,2l\cos\beta\sin\varphi\big|_{\varphi=0}\delta\varphi\underline{e}_x = \underline{0} \tag{11}$$

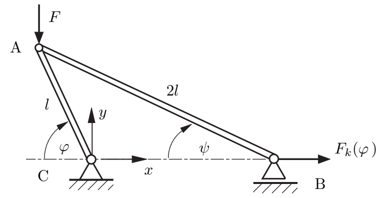
Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = \underline{W}\cdot\delta\underline{r}_W + \underline{S}\cdot\delta\underline{r}_W + (-\underline{S}\cdot\delta\underline{r}_B) = 0 \tag{12}$$
$$\Rightarrow Wl\sin\beta\delta\varphi + (S\cos\beta\underline{e}_x - S\sin\beta\underline{e}_z)\cdot\delta\underline{r}_W = 0 \tag{13}$$
$$\Rightarrow (Wl\sin\beta + Sl\cos\beta\sin\beta + Sl\sin\beta\cos\beta)\delta\varphi = 0 \tag{14}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{S = \frac{-W}{2\cos\beta}}} \tag{15}$$

Aufgabe 15

Die abgebildete Konstruktion aus starren Stäben wird mit der Kraft F belastet und befindet sich im statischen Gleichgewicht. Berechnen Sie mit dem *Prinzip der virtuellen Arbeit* die Haltekraft F_k als Funktion des Winkels φ.

Geg.: $F,\ l$



φ_a, ψ_a Winkelbezeichnungen in der ausgelenkte Lage

Ortsvektoren:

$$\vec{r}_F = -l\cos\varphi_a\vec{e}_x + l\sin\varphi_a\vec{e}_y \tag{16}$$
$$\vec{r}_K = (2l\cos\psi_a - l\cos\varphi_a)\vec{e}_x \tag{17}$$

Variation:
Allgemein gilt für eine Größe $\vec{r}$ als Funktion von N Koordinaten q_i:

$$\delta\vec{r}(q_1,...,q_N) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\delta q_i \quad . \tag{18}$$

$$\delta\vec{r}_F = l\sin\varphi_a\Big|_{\varphi_a=\varphi}\delta\varphi\vec{e}_x + l\cos\varphi_a\Big|_{\varphi_a=\varphi}\delta\varphi\vec{e}_y \tag{19}$$
$$\delta\vec{r}_K = \left(-2l\sin\psi_a\Big|_{\psi_a=\psi}\delta\psi + l\sin\varphi_a\Big|_{\varphi_a=\varphi}\delta\varphi\right)\vec{e}_x \tag{20}$$

Kinematische Beziehung:
In diesem Fall hat das System lediglich einen FHG ($N=1$) und wird damit durch die Koordinate $q_1=\varphi$ eindeutig beschrieben. Um das Prinzip der virtuellen Verrückungen anzuwenden, müssen alle Bewegungsmöglichkeiten durch eine Variable - hier φ - ausgedrückt werden. Dazu ist es nun nötig, über die kinematischen

Beziehungen Ausdrücke für $\delta\psi$, $\cos\psi$ und $\sin\psi$ in Abhängigkeit von φ zu bestimmen.

Aus der Höhe des Punktes A folgt:

$$2l\sin\psi = l\sin\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \sin\psi = \frac{\sin\varphi}{2} \tag{21}$$

bzw.

$$2\sin\psi_a = \sin\varphi_a \tag{22}$$
$$2\cos\psi_a\Big|_{\psi_a=\psi}\delta\psi = \cos\varphi_a\Big|_{\varphi_a=\varphi}\delta\varphi \tag{23}$$
$$2\cos\psi\delta\psi = \cos\varphi\delta\varphi \tag{24}$$
$$\delta\psi = \frac{\cos\varphi}{2\cos\psi}\delta\varphi \tag{25}$$

Aus Gl. (21) lässt sich mit $\sin^2\psi = 1-\cos^2\psi$ der Term $\cos\psi$ umformen:

$$4\sin^2\psi = \sin^2\varphi \tag{26}$$
$$4\left(1-\cos^2\psi\right) = \sin^2\varphi \tag{27}$$
$$\Rightarrow \quad \cos\psi = \frac{1}{2}\sqrt{4-\sin^2\varphi} \quad . \tag{28}$$

$\sin\psi$, $\cos\psi$ und $\delta\psi$ einsetzen:

$$\delta\vec{r}_K = \left(-2l\sin\psi\frac{\cos\varphi}{2\cos\psi}\delta\varphi + l\sin\varphi\delta\varphi\right)\underline{e}_x \tag{29}$$
$$= \left(-2l\frac{\sin\varphi}{2}\frac{\cos\varphi}{2\frac{1}{2}\sqrt{4-\sin^2\varphi}}\delta\varphi + l\sin\varphi\delta\varphi\right)\underline{e}_x \tag{30}$$
$$= \left(l\sin\varphi - l\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{4-\sin^2\varphi}}\right)\delta\varphi\vec{e}_x \tag{31}$$

Prinzip der virtuellen Arbeit:
Nach dem PdvA verschwindet im Gleichgewicht die virtuelle Arbeit δA aller äußeren Lasten am System:

$$\delta A = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}_F + \vec{F}_K\cdot\delta\vec{r}_K = 0 \tag{32}$$

Dabei ist darauf zu achten, dass die Lasten richtungstreu bleiben, also <u>nicht</u> variiert werden.

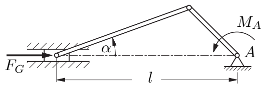
$$\left[-Fl\cos\varphi + F_K\left(l\sin\varphi - l\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{4-\sin^2\varphi}}\right)\right]\delta\varphi = 0 \tag{33}$$

$$F_K = F\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{4-\sin^2\varphi}}} \tag{34}$$

Hausaufgaben

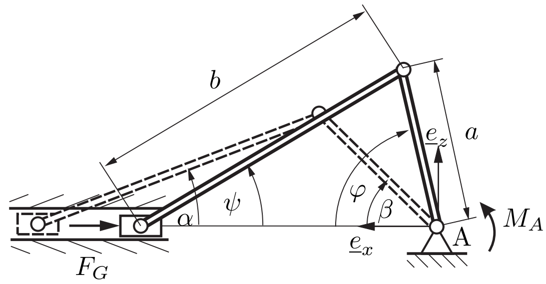
Aufgabe 6

Bei einem Kolbenkompressor wirke in der skizzierten Stellung auf die Kolbenfläche die Gaskraft F_G. Auf die rechte Stange wirkt das Antriebsmoment M_A. Bestimmen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen die Gleichgewichtslage (Winkel α), wenn die Reibungskräfte vernachlässigt werden.



Geg.: F_G, l, M_A

Nach einer gedachten Verschiebung (Drehung) werden die Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten in der ausgelenkten Lage aufgestellt und anschließend um die Gleichgewichtslage $\psi = \alpha$, bzw. $\beta = \varphi$ variiert. Das Aufstellen der virtuellen Arbeit liefert die gesuchte Gleichgewichtslage.



Die Belastungsgrößen, Ortsvektoren und ihre Variationen:

$$\underline{r}_F = (a\cos\varphi + b\cos\psi)\underline{e}_x \tag{35}$$
$$\delta\underline{r}_F = (-a\sin\varphi|_{\varphi=\beta}\delta\varphi - b\sin\psi|_{\psi=\alpha}\delta\psi)\underline{e}_x \tag{36}$$
$$\underline{\varphi} = -\varphi\underline{e}_y; \quad \underline{M}_A = M_A\underline{e}_y; \quad \underline{F}_G = -F_G\underline{e}_x; \tag{37}$$

$$\delta\underline{\varphi} = -\delta\varphi\underline{e}_y \tag{38}$$

Kinematische Beziehung:

$$a\sin\varphi = b\sin\psi \tag{39}$$
$$a\cos\varphi|_{\varphi=\beta}\delta\varphi = b\cos\psi|_{\psi=\alpha}\delta\psi \tag{40}$$

$$\delta\psi = \frac{a\cos\beta}{b\cos\alpha}\delta\varphi \tag{41}$$
$$\delta\underline{r}_F = \left(-a\sin\beta - a\sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)\delta\varphi\underline{e}_x \tag{42}$$

Virtuelle Arbeit:

$$\delta A = \underline{F}_G\cdot\delta\underline{r}_F + \underline{M}_A\cdot\delta\underline{\varphi} = 0 \tag{43}$$
$$\left(F_G a\left(\sin\beta + \sin\alpha\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) - M_A\right) = 0 \tag{44}$$

außerdem gilt:

$$b\sin\alpha = a\sin\beta \tag{45}$$
$$b\cos\alpha + a\cos\beta = l \tag{46}$$

eingesetzt ergibt es:

$$F_G \left(b \sin\alpha \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + a \sin\alpha \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \right) - M_A = 0 \tag{47}$$

$$F_G \left(b \tan\alpha \cos\alpha + a \tan\alpha \cos\beta \right) - M_A = 0 \tag{48}$$

$$F_G \tan\alpha \left(b \cos\alpha + a \cos\beta \right) - M_A = 0 \tag{49}$$

$$\tan\alpha = \frac{M_A}{F_G l}, \tag{50}$$

$$\text{also:} \quad \alpha = \arctan \frac{M_A}{F_G l}. \tag{51}$$

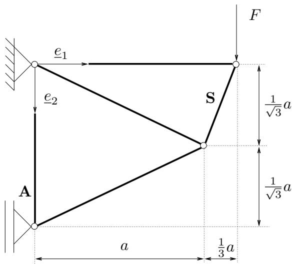
Aufgabe 12

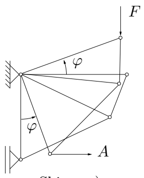
Das abgebildete Fachwerk aus starren Stäben wird mit der Kraft F belastet.

(a) Berechnen Sie mit den Basisvektoren $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ sowie mit Skizze *a)* die Ortsvektoren $\underline{r}_A$ und $\underline{r}_F$ zu den Angriffspunkten der Kräfte A und F. Berechnen Sie die Variationen $\delta\underline{r}_A$ und $\delta\underline{r}_F$. Berechnen Sie die Lagerkraft A mithilfe des PdvV.

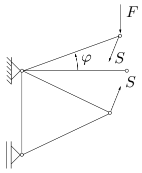
(b) Notieren Sie mit Skizze *b)* den Ortsvektor $\underline{r}_F = \underline{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S. Berechnen Sie die Variationen $\delta\underline{r}_F$ und $\delta\underline{r}_S$. Berechnen Sie die Stabkraft S mithilfe des PdvV, indem Sie S als äußere Last ansehen.

Hinweis:
$\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin 30° = \frac{1}{2}$





Skizze *a)*



Skizze *b)*

(a) Die Ortsvektoren $\underline{r}_A$ und $\underline{r}_F$ vom drehbaren Festlager zu den Kraftangriffspunkten lauten:

$$\underline{r}_A = \frac{2}{\sqrt{3}} a \left(\sin(\varphi)\underline{e}_1 + \cos(\varphi)\underline{e}_2 \right) \tag{52}$$

$$\underline{r}_F = \frac{4}{3} a \left(\cos(\varphi)\underline{e}_1 - \sin(\varphi)\underline{e}_2 \right) \tag{53}$$

• Die Variation ergibt sich dann zu:

$$\delta\underline{r}_A = \frac{\partial \underline{r}_A}{\partial\varphi}\delta\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} a \left(\cos(\varphi)\underline{e}_1 - \sin(\varphi)\underline{e}_2 \right) \delta\varphi \tag{54}$$

$$\delta\underline{r}_F = \frac{\partial \underline{r}_F}{\partial\varphi}\delta\varphi = \frac{4}{3} a \left(-\sin(\varphi)\underline{e}_1 - \cos(\varphi)\underline{e}_2 \right) \delta\varphi \tag{55}$$

• Berechnung der Lagerkraft A, mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\delta A = A\underline{e}_1 \cdot \delta\underline{r}_A|_{\varphi=0} + F\underline{e}_2 \cdot \delta\underline{r}_F|_{\varphi=0} \tag{56}$$

$$= A\underline{e}_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} a \left(\cos(0)\underline{e}_1 - \sin(0)\underline{e}_2 \right) \delta\varphi \tag{57}$$

$$+ F\underline{e}_2 \cdot \frac{4}{3} a \left(-\sin(0)\underline{e}_1 - \cos(0)\underline{e}_2 \right) \delta\varphi \tag{58}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} aA - \frac{4}{3} aF \right) \delta\varphi = 0 \tag{59}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} F \tag{60}$$

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{3}F = \frac{2}{\sqrt{3}}F \tag{61}$$

(b) Gesucht ist der Ortsvektor $\underline{r}_F = \underline{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S.

$$\underline{r}_F = \frac{4}{3} a \left(\cos(\varphi)\underline{e}_1 - \sin(\varphi)\underline{e}_2 \right) \tag{62}$$

$$\underline{r}_F = \underline{r}_S \tag{63}$$

• Berechnung der Variationen $\delta\underline{r}_F$ und $\delta\underline{r}_S$

$$\delta\underline{r}_F = \delta\underline{r}_S = \frac{4}{3} a \left(-\sin(\varphi)\underline{e}_1 - \cos(\varphi)\underline{e}_2 \right) \delta\varphi \tag{64}$$

• Bestimmung der Stabkraft S mithilfe des PdvV:

Die Kraft S liegt in Richtung eines Vektors $\underline{e}_S$. Dieser Vektor läßt sich durch $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ folgendermaßen ausdrücken.

$$\underline{e}_S = \cos(\alpha)\underline{e}_2 - \sin(\alpha)\underline{e}_1 \tag{65}$$

Da $\alpha = 30°$ wegen $\tan\alpha = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ergibt sich für $\underline{e}_S$:

$$\underline{e}_S = -\frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_2 \tag{66}$$

Mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen folgt für S:

$$\underline{S} = S\underline{e}_S = S\left(-\frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_2 \right) \tag{67}$$

$$\delta A = F\underline{e}_2 \cdot \delta\underline{r}_F|_{\varphi=0} + \underline{S} \cdot \delta\underline{r}_S|_{\varphi=0} \tag{68}$$

$$= \left(-\frac{4}{3} aF - \frac{4}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2} S = 0 \right) \delta\varphi \tag{69}$$

$$\Rightarrow \quad S = -\frac{2}{\sqrt{3}} F \tag{70}$$