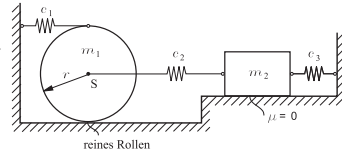


Tutorium

Aufgabe 19

(a) Stellen Sie für das skizzierte System das Bewegungsdifferentialgleichungssystem auf und schreiben Sie es auf Matrizenform um. Nutzen Sie dazu die LAGRANGE-Gleichungen 2. Art. Es sollen von vornherein kleine Auslenkungen angenommen werden.



(b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen und die dazugehörigen Eigenformen des Systems.

Geg.: $c_1 = \frac{1}{4}c$, $c_2 = c_3 = c$, $m_1 = \frac{2}{3}m$, $m_2 = m$, $\Theta_S = \frac{1}{2}m_1r^2$, r

(a) Aufstellen der potentiellen und kinetischen Energie:

$$U = \frac{1}{2}c_1(2x_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}c_3x_2^2 \quad (1)$$

$$= \frac{c}{8}4x_1^2 + \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2 \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2 \quad (3)$$

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\theta_S \left(\frac{\dot{x}_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2}{3}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3}mr^2 \frac{\dot{x}_1^2}{r^2} + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \quad (5)$$

$$= \frac{2}{6}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{6}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \quad (7)$$

Lagrangefunktion:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2 \right) \quad (8)$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art für konservative Systeme:

Generalisierte Koordinate: x_1

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad (9)$$

$$m\ddot{x}_1 + cx_1 + c(x_1 - x_2) = 0 \quad (10)$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{2c}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 = 0 \quad (11)$$

Generalisierte Koordinate: x_2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad (12)$$

$$m\ddot{x}_2 - c(x_1 - x_2) + cx_2 = 0 \quad (13)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{2c}{m}x_2 - \frac{c}{m}x_1 = 0 \quad (14)$$

Darstellung der Bewegungsdifferentialgleichungen in Matrizenform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2c}{m} & -\frac{c}{m} \\ -\frac{c}{m} & \frac{2c}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

mit $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ gilt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

(b) Ansatz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad (17)$$

Einsetzen in (16)

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \lambda^2 + 2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \lambda^2 + 2\omega_0^2 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Dieses Differentialgleichungssystem hat nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Determinante von \underline{A} gleich Null ist.

$$\det \underline{A} \stackrel{!}{=} 0 = (\lambda^2 + 2\omega_0^2)^2 - \omega_0^4 \quad (20)$$

$$= \lambda^4 + 4\lambda^2\omega_0^2 + 4\omega_0^4 - \omega_0^4 \quad (21)$$

$$= \lambda^4 + 4\lambda^2\omega_0^2 + 3\omega_0^4 \quad (22)$$

Mit p - q -Formel folgt für λ^2

$$\lambda_{I/II}^2 = -2\omega_0^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 - 3\omega_0^4} \quad (23)$$

$$\lambda_I^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i\omega_0 \quad (24)$$

$$\lambda_{II}^2 = -3\omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{3/4} = \pm i\sqrt{3}\omega_0 \quad (25)$$

⇒ die Eigenkreisfrequenzen sind $\omega_1 = \omega_0$ und $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$.

Um die Eigenformen zu bestimmen, müssen die λ_i wieder in die DGL (19) eingesetzt werden.

für $\lambda_{3/4} = \pm i\sqrt{3}\omega_0$

$$\begin{bmatrix} -3\omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -3\omega_0^2 + 2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Da die Eigenformen nur bekannt sind bis auf einen konstanten Faktor wird hier $\hat{x}_1 = 1$ gesetzt.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Wertet man die erste Zeile aus, so folgt:

$$-\omega_0^2 - \omega_0^2 \hat{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_2 = -1 \quad (28)$$

Damit folgt die zweite Eigenform zu

$$\underline{x}_{3/4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

für $\lambda_{1/2} = \pm i\omega_0$

$$\begin{bmatrix} -\omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 + 2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Da die Eigenformen nur bekannt ist bis auf einen konstanten Faktor wird hier $\hat{x}_1 = 1$ gesetzt.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

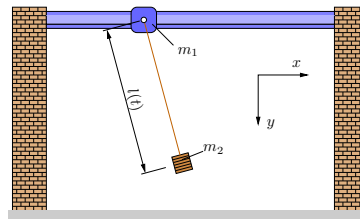
Wertet man die erste Zeile aus, so folgt:

$$\omega_0^2 - \omega_0^2 \hat{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_2 = 1 \quad (32)$$

Damit folgt die erste Eigenform zu

$$\underline{x}_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

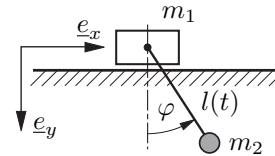
Aufgabe 20



Die Aufhängevorrichtung eines ebenen Pendels mit der zeitlich veränderlichen Länge $l(t)$ und der Pendelmasse m_2 gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Führung und hat die Masse m_1 .

Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

Geg.: $m_1, m_2, l(t), g$



Kinematik:

Das System hat 2 Freiheitsgrade, weshalb 2 generalisierte Koordinaten gewählt werden.

$$q_1 = x \text{ Koordinate zum Mittelpunkt der Masse } m_1 \quad (34)$$

$$q_2 = \varphi \text{ Drehwinkel (siehe Skizze)} \quad (35)$$

$$\underline{r}_1 = x \underline{e}_x \Rightarrow \underline{v}_1 \equiv \dot{\underline{r}}_1 = \dot{x} \underline{e}_x \quad (36)$$

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + \underline{r}_{12} = x \underline{e}_x + l(t) \sin \varphi \underline{e}_x + l(t) \cos \varphi \underline{e}_y \quad (37)$$

$$\Rightarrow \underline{v}_2 \equiv \dot{\underline{r}}_2 \quad (38)$$

$$= (\dot{x} + \dot{l} \sin \varphi + l \cos \varphi \dot{\varphi}) \underline{e}_x + (\dot{l} \cos \varphi - l \sin \varphi \dot{\varphi}) \underline{e}_y$$

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x} + \dot{l} \sin \varphi + l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (\dot{l} \cos \varphi - l \sin \varphi \dot{\varphi})^2 \right] \quad (39)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 (\dot{x} \dot{l} \sin \varphi + \dot{x} l \cos \varphi \dot{\varphi})$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{l} \sin \varphi + l \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (\dot{l} \cos \varphi - l \sin \varphi \dot{\varphi})^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 (\dot{x} \dot{l} \sin \varphi + \dot{x} l \cos \varphi \dot{\varphi})$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2)$$

Potentielle Energie:

$$U = -m_2 g l(t) \cos \varphi \quad (40)$$

Lagrange - Funktion:

$$L = K - U \quad (41)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 (\dot{x} \dot{l} \sin \varphi + \dot{x} l \cos \varphi \dot{\varphi})$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2) + m_2 g l(t) \cos \varphi$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2(\dot{l} \sin \varphi + l \cos \varphi \dot{\varphi}) \quad (42)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2(\ddot{l} \sin \varphi + 2\dot{l} \cos \varphi \dot{\varphi} - \dot{l} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \ddot{\varphi}) \quad (43)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2(\dot{x} l \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}) \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m_2(\ddot{x} l \cos \varphi + \dot{x} \dot{l} \cos \varphi - \dot{x} l \sin \varphi \dot{\varphi} + 2l \dot{l} \dot{\varphi} + l^2 \ddot{\varphi}) \quad (46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2(\dot{x} \dot{l} \cos \varphi - \dot{x} l \sin \varphi \dot{\varphi}) - m_2 g l \sin \varphi \quad (47)$$

$$\alpha = (\dot{x} \dot{l} \cos \varphi - \dot{x} l \sin \varphi \dot{\varphi}) \quad (48)$$

Lagrange - Gleichungen 2.Art:

für konservative Systeme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (49)$$

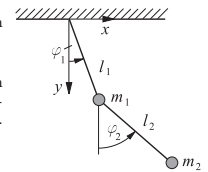
Bewegungsdifferentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2(\ddot{l} \sin \varphi + 2\dot{l} \cos \varphi \dot{\varphi} \\ - \dot{l} \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \ddot{\varphi}) = 0 \\ \ddot{x} l \cos \varphi + 2\dot{l} \dot{\varphi} + l^2 \ddot{\varphi} + g l \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 17

Zwei masselose Stangen (Längen l_1 und l_2) und zwei Punktmassen m_1 und m_2 bilden ein Doppelpendel.



(a) Bestimme für die Bewegung des skizzierten Doppelpendels in einer vertikalen Ebene (Erdbeschleunigung g) mit Hilfe der LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen. Nutze die generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2 .

(b) Wie lauten die Gleichgewichtslagen?

Geg.: m_1, m_2, l_1, l_2, g

a) Das Nullniveau für die potentielle Energie liege bei $y =$

$$U = -gm_1 y_1 - gm_2 y_2 \quad (50)$$

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (51)$$

Kinematische Beziehungen: Drücke die in (50) und (51) vorkommenden kinematischen Größen aus als Funktion der beiden (willkürlich gewählten) generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2 . (System hat 2 Freiheitsgrade)

$$y_1 = l_1 \cos \varphi_1 \quad \dot{y}_1 = -\dot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 \quad (52)$$

$$x_1 = l_1 \sin \varphi_1 \quad \dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 \quad (53)$$

$$y_2 = y_1 + l_2 \cos \varphi_2 \quad \dot{y}_2 = \dot{y}_1 - \dot{\varphi}_2 l_2 \sin \varphi_2 \quad (54)$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin \varphi_2 \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{\varphi}_2 l_2 \cos \varphi_2 \quad (55)$$

Die LAGRANGEfunktion ergibt sich damit zu:

$$L = K - U \quad (56)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) \\ &+ \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 l_2^2 + 2\dot{\varphi}_1 l_1 \dot{\varphi}_2 l_2 \right. \\ &\quad \left. (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \right] \\ &+ g(m_1 + m_2) l_1 \cos \varphi_1 + g m_2 l_2 \cos \varphi_2 \quad (57) \end{aligned}$$

mit $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ und $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \\ &+ m_2 \dot{\varphi}_1 l_1 \dot{\varphi}_2 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &+ g(m_1 + m_2) l_1 \cos \varphi_1 + g m_2 l_2 \cos \varphi_2 \quad (58) \end{aligned}$$

Für die LAGRANGESche Gleichungen 2.Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (59)$$

benötigen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &- g(m_1 + m_2) l_1 \sin \varphi_1 \quad (60) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - g m_2 l_2 \sin \varphi_2 \quad (61)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 \\ &+ m_2 l_1 l_2 \left[\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right. \\ &\quad \left. - (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \quad (63) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \left[\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right. \\ &\quad \left. - \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \quad (65) \end{aligned}$$

Eingesetzt in (59) erhalten wir die beiden Bewegungsdifferentialgleichungen

$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_2 \left[\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] + g \sin \varphi_1 = 0 \quad (66)$$

$$l_2 \ddot{\varphi}_2 + l_1 \left[\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] + g \sin \varphi_2 = 0 \quad (67)$$

b)

$$\text{Gleichgewicht : } \dot{\varphi}_{i,G} = 0, \quad \ddot{\varphi}_{i,G} = 0 \quad (68)$$

$$\text{aus (66): } g \sin \varphi_{1,G} = 0 \quad (69)$$

$$\text{aus (67): } g \sin \varphi_{2,G} = 0 \quad (70)$$

$$\varphi_{1,G} = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (71)$$

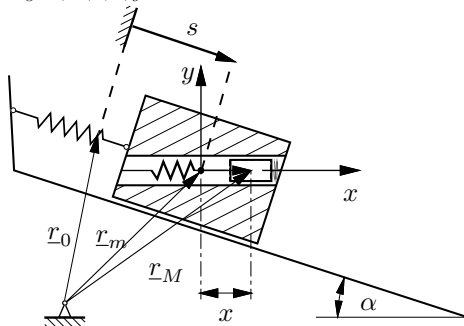
$$\varphi_{2,G} = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (72)$$

Gleichgewicht herrscht, wenn jedes Pendel entweder genau senkrecht hängt oder genau senkrecht nach oben steht.

Aufgabe 21

Auf einer schieben Ebene bewegt sich reibungsfrei ein Körper der Masse m , Bewegungskordinate s , infolge der Schwerkraft abwärts. In einer radialen Bohrung ist ein Zylinder der Masse M , der Relativkoordinate x , elastisch angeordnet, der sich ebenfalls reibungsfrei bewegen kann. Ausgehend von der Ruhelage des Systems sind mit den LAGRANGESchen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen für die generalisierten Koordinaten s und x aufzustellen.

Geg.: m, M, c, α, g



1. Ortsvektoren und Kinematik

$$r_m = r_0 + s \cos \alpha e_x - s \sin \alpha e_y \quad (73)$$

$$|\dot{r}_m|^2 = \dot{s}^2 \quad (74)$$

$$r_M = r_m + x e_x \quad (75)$$

$$= (x + s \cos \alpha) e_x - s \sin \alpha e_y \quad (76)$$

$$|\dot{r}_M|^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2 \dot{x} \dot{s} \cos \alpha \quad (77)$$

Dabei ist r_0 der Vektor vom beliebigen, festen Punkt zum Schwerpunkt des Systems in der Ausgangslage.

2. Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2} m |\dot{r}_m|^2 + \frac{1}{2} M |\dot{r}_M|^2 \quad (78)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{s}^2) + M \dot{x} \dot{s} \cos \alpha \quad (79)$$

3. Potentielle Energie:

$$U = -(M + m) g s \sin \alpha + \frac{1}{2} 2c \cdot s^2 + \frac{1}{2} 2c \cdot x^2 \quad (80)$$

4. LAGRANGESche Funktion:

(Generalisierte Koordinaten: s und x)

$$L = K - U \quad (81)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{s}^2) + M \dot{x} \dot{s} \cos \alpha$$

$$+ \underbrace{(M + m)}_{=: m_{\text{ges}}} g s \sin \alpha - c(s^2 + x^2) \quad (82)$$

5. Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m_{\text{ges}} \dot{s} + M \dot{x} \cos \alpha \quad (83)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) = m_{\text{ges}} \ddot{s} + M \ddot{x} \cos \alpha \quad (84)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = m_{\text{ges}} g \sin \alpha - 2cs \quad (85)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} + M \dot{s} \cos \alpha \quad (86)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = M \ddot{x} + M \ddot{s} \cos \alpha \quad (87)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2cx \quad (88)$$

6. Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (89)$$

Ausgewertet ergibt sich für $i = 1$ mit $q_1 = s$:

$$m_{\text{ges}} \ddot{s} + 2cs + M \cos \alpha \ddot{x} = m_{\text{ges}} g \sin \alpha \quad (90)$$

und für $i = 2$ mit $q_2 = x$:

$$M \cdot \ddot{x} + 2cx + M \cos \alpha \ddot{s} = 0. \quad (91)$$