

Im Kapitel 1 beschäftigen wir uns zunächst mit wichtigen Grundlagen, die wir sowohl für die Anwendung des Verfahrens von RAYLEIGH-RITZ als auch eine Übungswoche später für die Anwendung der Sätze von CASTIGLIANO benötigen.

1 Energien kontinuierlicher Medien

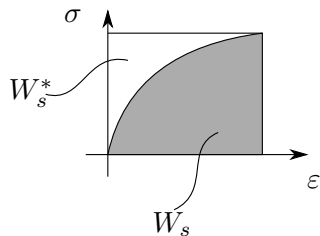
1.1 Formänderungsenergie

Wird ein Körper durch äußere Belastungen verformt, so speichert er im Inneren Formänderungsenergie W , die alternativ auch potenzielle Energie U des Körpers genannt wird. Diese Formänderungsenergie ist nichts anderes als die Arbeit, die die inneren Spannungen an den Verzerrungen beim Übergang von der unbelasteten Ausgangslage in die verformte Lage verrichten.

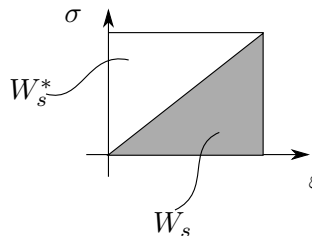
Spezifische Formänderungsenergie und -ergänzungsenergie

Am Sonderfall eines Dehnstabes wird nachfolgend der Unterschied zwischen (spezifischer) Formänderungsenergie und Formänderungs**ergänzungs**energie erklärt. Letztere wird auch spezifische **komplementäre** Formänderungsenergie genannt. Anstelle von spezifischen Energiegrößen spricht man auch von Energiedichten. Es sei zunächst noch ein beliebiges nichtlinear elastisches Materialgesetz ausgedrückt über die Funktion $\sigma(\varepsilon)$ zugelassen; die Umkehrfunktion sei $\varepsilon(\sigma)$.

Nichtlinear elastisches Material



Linear elastisches Material:



Die Fläche, die durch den Graphen der Funktion $\sigma(\varepsilon)$ und der ε -Achse begrenzt ist, ist die **spezifische Formänderungsenergie** W_s . Sie wird berechnet mittels Integration der Spannung über die Dehnung, also

$$W_s := \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon.$$

In den Abbildungen ist W_s grau hinterlegt. Die zugehörige **spezifische Formänderungsenergänzungsenergie** oder spezifische komplementäre Formänderungsenergie ergibt sich hingegen aus der Integration der Dehnung über die Spannung, wozu wir die Umkehrfunktion $\varepsilon(\sigma)$ nutzen:

$$W_s^* := \int_0^\sigma \varepsilon(\sigma) d\sigma.$$

Die Ergänzungsenergie ist in den Abbildungen weiß hinterlegt. Es ist sofort ersichtlich, dass allgemein

$$W_s^* = \sigma\varepsilon - W_s$$

gilt. Im Sonderfall des linear elastischen Materialverhaltens sind Formänderungs- und -ergänzungsenergie gleich groß

$$W_s^* = W_s = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon.$$

Zur Berechnung der (gesamten) Formänderungsenergie W , die in einem Dehnstab der Länge ℓ gespeichert ist, müssen wir lediglich die spezifische Energie über das Volumen integrieren:

$$W = \int_{\mathcal{V}} W_s dV = \int_0^\ell W_s A dx.$$

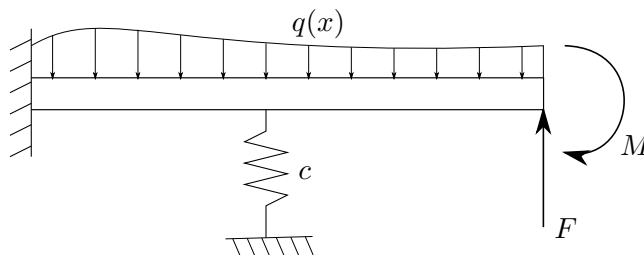
Im folgenden werden wir immer linear elastisches Verhalten voraussetzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon = Eu' \\ \implies W_s &= \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}Eu'^2 = W_s^* \\ \implies W &= \frac{1}{2} \int_0^\ell EAu'^2 dx. \end{aligned}$$

1.2 Äußere Arbeit und sonstige potentielle Energie

Betrachten wir nun nicht nur den deformierten Körper, sondern das gesamte System, bestehend aus dem deformierten Körper, äußeren Streckenlasten, Kräften und Momenten sowie zusätzlichen Einzelfedern.

In der rechten Abbildung ist ein solches System gezeigt: Ein Biegebalken der Länge ℓ beansprucht durch eine Streckenlast $q(x)$, ein Einzelmoment M und eine Einzelkraft F am Balkenende. Außerdem ist in der Mitte des Balkens eine Einzelfeder der Steifigkeit c vertikal angeschlossen.



Neben der Formänderungsenergie des Balkens W_B speichert auch die Feder Formänderungsenergie / potenzielle Energie W_F . Sie beträgt

$$W_F = \frac{1}{2}c\Delta x^2 = \frac{1}{2}cw(\ell/2)^2$$

Zur Gesamtenergie des Systems trägt auch die Arbeit der äußeren Kräfte bei, die allgemein mittels

$$A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_j \vec{M}_j \cdot \vec{\varphi}_j + \int_{(l)} \vec{q}(x) \cdot \vec{w}(x) dx$$

berechnet werden kann. In unserem Beispiel ist

$$A = -Fw(\ell) + Mw'(\ell) + \int_0^\ell q(x)w(x) dx$$

Die gesamte (potenzielle) Energie, die ein System speichert, ist dann die Differenz aus der Formänderungsenergie und der äußeren Arbeit

$$\Pi = W - A.$$

Π wird auch elastisches Gesamtpotenzial oder potenzielle Energie des Systems genannt, weil auch die Arbeit der äußeren Kräfte konservativ ist und damit über ein Potenzial $U = -A$ dargestellt werden kann. In unserem Beispiel ist

$$\Pi = W_B + W_F - A.$$

1.3 Kinetische Energie

Sie ist die Bewegungsenergie des Systems. Besteht das System aus Balkenelementen und Einzelmassen, müssen ihre kinetischen Energien summiert werden. Die kinetischen Energien für verschiedene Kontinua (und ihre Formänderungsenergien) sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst.

1.4 Übersicht über die Energien elastischer Kontinua

	Längsdehnung	ebene Biegung	Torsion	Saite
Verformungsgröße	u	$w, \psi = -w'$	ϑ	w
Steifigkeit	EA	EI_y	GI_p	Vorspannung S
Material-Struktur-Gesetz	$N = EAu'$	$M_b = -EI_y w''$	$M_t = GI_p \vartheta'$	
W in Schnittlastdarstellung	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \frac{N^2}{EA} dx$	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \frac{M_b^2}{EI_y} dx$	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \frac{M_t^2}{GI_p} dx$	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} S(w')^2 dx$
W in Verformungsdarstellung	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} EA (u')^2 dx$	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} EI_y (w'')^2 dx$	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} GI_p (\vartheta')^2 dx$	siehe oben
kinetische Energie	$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \rho A \dot{u}^2 dx$	$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \rho A \dot{w}^2 dx$	$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \rho I_p \dot{\vartheta}^2 dx$	$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \rho A \dot{w}^2 dx$

2 Das Verfahren von Rayleigh-Ritz

Mithilfe des Verfahrens von Rayleigh-Ritz können in der Statik näherungsweise Verschiebungen / Verdrehungen und in der Dynamik näherungsweise Eigenkreisfrequenzen ermittelt werden. Dabei werden für die Verschiebungen / Verdrehungen oder aber die Eigenschwingungsformen Näherungsansätze gemacht, die lediglich den geometrischen Randbedingungen genügen müssen. Die Lösungsmechanismen sind in Statik und Dynamik analog und nachfolgend nur stichpunktartig aufgeführt.

2.1 Statik

1. Mache einen Ansatz für die Verschiebung / Verdrehung in der Form

$$w(x) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)$$

und stelle sicher, dass jede der N Ansatzfunktionen $\varphi_n(x)$ (auch Vergleichsfunktionen genannt) für sich die geometrischen Randbedingungen des Systems erfüllt.

2. Berechne dann das elastische Gesamtpotenzial $\Pi(a_1, \dots, a_N) = W - A$ (In der Vorlesung U genannt). Das Gesamtpotenzial ist von den N unabhängigen Freiwerten a_n abhängig, die als generalisierte Koordinaten angesehen werden können.
3. Im Gleichgewicht muss Π ein Minimum annehmen. Dann gilt:

$$\delta\Pi = \sum_{n=1}^N \frac{\partial\Pi}{\partial a_n} \delta a_n = 0.$$

Da die δa_n voneinander unabhängig sind, muss weiter gelten $\frac{\partial\Pi}{\partial a_n} = 0$ und zwar für jedes n . Man erhält also N Gleichungen für die N unbekanntenen Freiwerte a_n .

4. Einsetzen der berechneten a_n in den gemachten Näherungsansatz ergibt die gesuchte Verschiebung / Verdrehung.

2.2 Dynamik

1. Mache einen Ansatz für die Eigenschwingungsform

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \varphi_n(x)$$

und stelle sicher, dass jede der N Ansatzfunktionen $\varphi_n(x)$ für sich die geometrischen Randbedingungen des Systems erfüllt.

2. Berechne dann $L = K - U$, wobei U hier identisch W ist. Die LAGRANGE-Funktion wird dann von den N generalisierten Koordinaten $a_1(t), \dots, a_N(t)$ abhängen.
3. Wende die LAGRANGE-Gleichungen 2. Art für konservative Systeme an:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial a_n} = 0 \quad \text{für } n = 1, \dots, N.$$

Daraus ergeben sich N gewöhnliche Differenzialgleichungen 2. Ordnung, die in Matrizenform dargestellt werden können.

4. Mithilfe eines Eulerschen Ansatzes kann das System gelöst werden, was auf Näherungen für die Eigenkreisfrequenzen und auf Eigenvektoren führt. Letztere werden dann wiederum in den Ansatz eingesetzt, um Näherungen für die Eigenfunktionen zu erhalten.

Sonderfall: Eingliedriger Ansatz und RAYLEIGH-Quotient

Mit Hilfe des eingliedrigen Ansatzes kann auch nur eine Näherung für die **erste** Eigenkreisfrequenz ermittelt werden. In diesem Fall gibt es nur eine generalisierte Koordinate, so dass nach Auswertung der LAGRANGE-Gleichungen 2. Art auch nur eine gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung verbleibt - die Bewegungsdifferenzialgleichung für einen Einmassenschwinger -, aus der die Eigenkreisfrequenz direkt ablesbar ist. Für das Beispiel der Biegung ergibt sich z. B.:

$$\int_{\mathcal{L}} \rho A \varphi^2 dx \cdot \ddot{a} + \int_{\mathcal{L}} EI_y (\varphi'')^2 dx \cdot a = 0$$

Die genäherte Eigenkreisfrequenz lautet damit:

$$\omega = \sqrt{\frac{\int_{\mathcal{L}} EI_y (\varphi'')^2 dx}{\int_{\mathcal{L}} \rho A \varphi^2 dx}}.$$

Der Quotient auf der rechten Seite heißt RAYLEIGH-Quotient. Bei eingliedrigen Ansätzen darf dieser auch direkt zur Lösung herangezogen werden, ohne den ganzen Lösungsmechanismus abarbeiten zu müssen.