Motivation und Wiederholung

Mit den LAGRANGE-Gleichungen 2. Art haben wir eine effiziente Methode kennengelernt, mit welcher wir die Bewegungsdifferenzialgleichungen eines beliebig komplexen mechanischen Systems aufstellen können. Weder in der Zahl der Freiheitsgrade noch in der Art der wirkenden Kräfte sind wir irgendwelchen Einschränkungen ausgesetzt. Während konservative Kräfte über die potenzielle Energie in den Formalismus eingingen, konnte die Wirkung von Reibungs-, Dämpfungs- und Luftwiderstandskräften über die Dissipationsfunktion ausgedrückt werden. Die verbleibenden Restkräfte wurden in Form von generalisierten (Rest-)Kräften $\hat{Q}_i$ separat auf der rechten Seite der Gleichungen aufgeführt. Der Formalismus sei hier kurz wiederholt:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \hat{Q}_i} \qquad (1)$$

mit

$i = 1, ..., n$	wobei n die Anzahl der Freiheitsgerade des Systems ist
q_i	generalisierte Koordinaten
$L = K - U$	LAGRANGEfunktion
D	Dissipationsfunktion
$\hat{Q}_i$	generalisierte **Rest**kräfte

Gerade bei großen Systemen hat der Lagrange-Formalismus gegenüber den Grundaxiomen der Mechanik (Schwerpunkt- und Drallsatz) den großen Vorteil, dass keine Zwangskräfte als unbekannte Größen in das mathematische Grundgerüst eingehen und somit auch nicht eliminiert werden müssen. Das kann man allerdings auch als Nachteil auslegen, wenn die Zwangskräfte, z. B. im Rahmen einer Analyse des Bauteilversagens explizit gefordert sind. Außerdem haben wir bislang den Einfluss von Coulombscher Reibung ausgeklammert. Nach Coulomb ist die Trockenreibung nämlich proportional zur Normalkraft, die eine Zwangskraft ist. Es stellt sich also die Frage, wie müssen wir den Lagrange-Formalismus ändern, um damit auch Zwangskräfte berechnen zu können? Dies führt uns auf die sogenannten Lagrange-Gleichungen 1. Art. Gleich vorweg sei gesagt, dass die Lagrange-Gleichungen 1. Art sicher keinen nennenswerten Vorteil gegenüber der Anwendung von Schwerpunkt- und Drallsatz haben, wenn es darum geht, alle Zwangskräfte zu berechnen. Wohl aber gibt es einen entscheidenden Vorteil: Mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen 1. Art können interessierende Zwangskräfte gezielt berechnet werden, ohne alle Zwangskräfte ermitteln zu müssen.

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art

In einem ersten Schritt wird das ursprüngliche System mit n Freiheitsgraden in ein „freieres“ System mit $n + m$ Freiheitsgraden überführt. Jeder dieser m Freiheitsgrade steht dabei für eine Bewegungsrichtung, die bislang durch eine Zwangskraft eingeschränkt wurde (beispielsweise die radiale Bewegungsmöglichkeit eines Fadenpendels). Da die generalisierten $n + m$ Koordinaten nun nicht mehr unabhängig voneinander sind, sind die LAGRANGE-Gleichungen 2. Art (1) nicht mehr gültig. Wir können die Gültigkeit dieser Gleichungen allerdings zurückgewinnen, wenn wir auf der rechten Seite zusätzliche generalisierte Kräfte Q_i^z einbauen, die dafür sorgen, dass die Bewegung des ursprünglichen Systems mit n Freiheitsgraden wieder hergestellt wird. Die generalisierten Kräfte Q_i^z können dabei über die Zwangsbedingungen ausgedrückt werden. Das sind die geometrisch-kinematischen Bedingungen, die für die Einschränkung der m überzähligen Freiheitsgrade sorgen. Wir werden jene im Folgenden **Nebenbedingungen** nennen. Die m Nebenbedingungen müssen stets in der Form

$$g_k(q_1, ..., q_{n+m}, t) = 0 \quad k = 1, ..., m$$

aufgestellt werden. Beispielsweise gilt für ein Fadenpendel $g(r) = r - l = 0$.
Zwischen den unbekannten generalisierten Kräften Q_i^z und den Nebenbedingungen besteht der

Zusammenhang

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i} = Q_i^z \,,$$

worin λ_k die sogenannten Lagrange-Multiplikatoren sind, die es zu bestimmen gilt. Es treten so viele Multiplikatoren auf, wie Nebenbedingungen vorhanden sind. Es sei angemerkt, dass die eingeführten generalisierten Kräfte Q_i^z zwar unbekannt sind, jedoch untereinander abhängig sein können/werden, denn die Anzahl der zusätzlichen Unbekannten ist durch die Anzahl der Nebenbedingungen und damit durch die Anzahl der Lagrange-Multiplikatoren festgelegt. Mit diesen Informationen lauten die Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \hat{Q}_i + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i}}_{=Q_i^z}} \tag{2}$$

mit

$i = 1, ..., n+m$	wobei $n+m$ die Anzahl der Freiheitsgerade des „freieren“ Systems (Ersatzsystems) und m die Anzahl der Zwangsbedingungen sind
q_i	generalisierte Koordinaten
$L = K - U$	Lagrange-Funktion
D	Dissipationsfunktion
$\hat{Q}_i$	generalisierte (Rest-)Kräfte
Q_i^z	generalisierte Kräfte, die zusätzlich eingeführt wurden, um die Zwänge des ursprünglichen Systems wieder herzustellen
g_k	k-te Zwangsbedingung in der Form $g_k(q_1, ..., q_{n+m}) = 0$
λ_k	Lagrange-Multiplikator der k-ten Zwangsbedingung

Es sei angemerkt, dass mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen 1. Art nicht nur die Zwangskräfte berechnet werden können, sondern gleichermaßen die Bewegungsdifferenzialgleichungen des ursprünglichen Systems abfallen.

Allgemeines Lösungskonzept

1. Überführung eines Systems von n Freiheitsgraden in ein System von $n+m$ Freiheitsgraden durch „Lösen/Aufbrechen“ von geeigneten Bindungen. Die Anzahl der zusätzlichen Bewegungsmöglichkeiten ist m.
2. Aufstellen der Lagrange-Funktion, der Dissipationsfunktion und der generalisierten Restkräfte $\hat{Q}_i$ für das Ersatzsystem mit $n+m$ generalisierten Koordinaten.
3. Formulieren der m Zwangsbedingungen in der Form $g_k(q_1, ..., q_{n+m}, t) = 0$.
4. Berechnung aller notwendigen Ableitungen.
5. Aufstellen der $m+n$ Lagrange-Gleichungen 1. Art gemäß Gleichung (2).
6. Auflösung des Gleichungssystems nach den Lagrange-Multiplikatoren unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (und deren Ableitungen).
7. Zusammenhang zwischen den realen Zwangskräften und den generalisierten Kräften Q_i^z über die virtuelle Arbeit aufstellen. Mit Hilfe der berechneten Lagrange-Multiplikatoren ergeben sich dann die gesuchten Zwangskräfte. Außerdem fallen die Bewegungsdifferenzialgleichungen des realen Systems ab.