Lagrange-Gleichungen 2. Art

In der ersten Übungswoche haben wir die LAGRANGE-Gleichungen 2. Art für *konservative Systeme* formuliert. Sind *nicht-konservative Kräfte* im System vorhanden, so muss der LAGRANGE-Formalismus wie folgt modifiziert werden:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i} \tag{1}$$

mit

$i = 1, ..., n$	wobei n die Anzahl der Freiheitsgerade des Systems ist
q_i	generalisierte Koordinaten
$\dot{q}_i$	generalisierte Geschwindigkeiten
$L = K - U$	LAGRANGEfunktion
Q_i	generalisierte Kräfte

Generalisierte Kräfte

Anstelle der „0“ auf der rechten Seite stehen nun die sogenannten generalisierten Kräfte Q_i, die den Einfluss der nicht-konservativen, eingeprägten Kräfte wiedergeben. Sie müssen gemäß

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j^{\text{n.k.}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \tag{2}$$

berechnet werden. Darin ist m die Anzahl der nicht-konservativen Kräfte, deren Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten durch $\vec{r}_j$ gegeben ist. Zur Bestimmung der generalisierten Kräfte müssen diese Ortsvektoren nach den generalisierten Koordinaten abgeleitet und mit den zugehörigen Kräften skalar-multipliziert werden. Eine gute Alternative bietet sich über die virtuelle Arbeit δA an:

$$\delta A := \sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j^{\text{n.k.}} \cdot \delta\vec{r}_j = \sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j^{\text{n.k.}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}\delta q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j^{\text{n.k.}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}\right)}_{=Q_i} \delta q_i \tag{3}$$

Die generalisierten Kräfte sind also die Vorfaktoren der Variationen der generalisierten Koordinaten in der virtuellen Arbeit.

Dissipationsfunktion

Wie gerade diskutiert, wird der Einfluss von nicht-konservativen Kräften über die generalisierten Kräfte gemäß Gleichung (2) in dem erweiterten Formalismus (1) berücksichtigt. Bei der Aufstellung der generalisierten Kräfte werden jedoch häufig Fehler gemacht, insbesondere Vorzeichenfehler. Daher wird der Formalismus zumeist noch weiter vereinfacht. Der Einfluss einiger nicht-konservativer Kräfte kann nämlich über eine sogenannte Dissipationsfunktion D dargestellt werden. Zu den Kräften zählen:

- COULOMBsche Reibung: $\boxed{D_1 = \mu N |\vec{v}_{rel}|^1}$
  μ ist der Gleitreibungskoeffizient, N ist die Normalkraft
- Lineare Dämpfung: $\boxed{D_2 = \frac{1}{2} d |\vec{v}_{rel}|^2}$
  d ist die Dämpfungskonstante

- Luftwiderstand: $\boxed{D_3 = \frac{1}{3} c |\vec{v}_{rel}|^3}$
  c ist der Luftwiderstandsbeiwert

Die negativen partiellen Ableitungen der Dissipationsfunktion nach den generalisierten Geschwindigkeiten ergeben die generalisierten Kräfte:

$$\tilde{Q}_i := -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \tag{4}$$

Gegenüber der Aufstellung der generalisierten Kräfte hat die Einführung der Dissipationsfunktion den großen Vorteil, dass man sich keine Gedanken um das Vorzeichen machen muss! Nach Abspaltung derjenigen nicht-konservativen Kräfte, deren Einfluss sich über eine Dissipationsfunktion darstellen lässt, verbleiben nur noch die generalisierten **Rest**kräfte $\hat{Q}_i$. Dahinter verbirgt sich also genau derjenige Teil der eingeprägten Kräfte, der sich weder über ein Potenzial noch über eine Dissipationsfunktion erfassen lässt. Der zu Gleichung (1) alternative LAGRANGE-Formalismus 2. Art, den wir in der Regel benutzen werden, lautet:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \hat{Q}_i} \tag{5}$$

mit

$i = 1, ..., n$	wobei n die Anzahl der Freiheitsgerade des Systems ist
q_i	generalisierte Koordinaten
$\dot{q}_i$	generalisierte Geschwindigkeiten
$L = K - U$	LAGRANGEfunktion
D	Dissipationsfunktion
$\hat{Q}_i$	generalisierte **Rest**kräfte

Allgemeines Lösungskonzept

1. Einführung von generalisierten Koordinaten q_i
2. Kinematik: Ortsvektoren zu den Schwerpunkten der einzelnen Körper aufstellen $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_i)$ und daraus deren Geschwindigkeiten $\vec{v}_k = \vec{v}_k(q_i, \dot{q}_i)$ ermitteln
3. Aufstellen der kinetischen Energie $K(q_i, \dot{q}_i)$ des Gesamtsystems; bei rotierenden Körpern müssen die Rotationsanteile um den Schwerpunkt berücksichtigt werden
4. Aufstellen der potenziellen Energie $U(q_i)$ des Gesamtsystems
5. Aufstellen der LAGRANGE-Funktion gemäß $L(q_i, \dot{q}_i) = K(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)$
6. Aufstellen der Dissipationsfunktion D
7. Berechnung der generalisierten (Rest-)Kräfte $\hat{Q}_i$ über die virtuelle Arbeit gemäß (3)
8. Berechnung der Ableitungen $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$, $\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$ und $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ für $i = 1, ..., n$
9. Auswertung der LAGRANGE-Gleichungen 2. Art gemäß Gleichung (5) unter Nutzung der im vorherigen Schritt berechneten, partiellen Ableitungen und der generalisiereten (Rest-)Kräfte $\hat{Q}_i$.