Lagrange-Gleichungen 2. Art für konservative Systeme

Gegenstand der ersten Woche bildet die Kinetik (Dynamik) von Starrkörpersystemen. Dabei wollen wir zunächst nur konservative Systeme untersuchen, d.h. alle eingeprägten Kräfte, die im/am System wirken, seien konservativ. Aus der Veranstaltung „Kinematik und Dynamik“ ist bekannt, dass die Arbeit solcher Kräfte unabhängig vom Weg ist und wir daher deren Arbeit über eine Potenzialdifferenz (bzw. Differenz von potenziellen Energien) darstellen könnnen. Die Bewegungsdifferenzialgleichungen können wir in diesem Fall durch Auswertung der Lagrange-Gleichungen 2. Art für konservative Systeme ermitteln:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \quad \text{für} \quad i = 1, ..., n. \tag{1}$$

n Anzahl der Freiheitsgrade des Systems
q_i generalisierte Koordinaten
$\dot{q}_i$ generalisierte Geschwindigkeiten

Die so genannten generalisierten Koordinaten q_i beschreiben dabei die unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten des Systems, weshalb deren Anzahl der Anzahl von Freiheitsgraden n entspricht. Die Lage des Systems ist also durch die generalisierten Koordinaten in eindeutiger Weise bestimmt.

Lagrange-Funktion

Die in der Gleichung (1) auftretende Funktion L heißt Lagrange-Funktion. Sie gibt die Differenz aus der kinetischen und potenziellen Energie des Systems an.

$$L\left(q_i, \dot{q}_i\right) = K\left(q_i, \dot{q}_i\right) - U\left(q_i\right) \tag{2}$$

K kinetische Energie
U potentielle Energie

Wie aus Gleichung (2) hervorgeht, benötigen wir zur Auswertung der Lagrange-Gleichungen 2. Art gemäß Gleichung (1) die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten und generalisierten Geschwindigkeiten.

Allgemeines Lösungskonzept

1. Einführung von generalisierten Koordinaten q_i
2. Kinematik: Ortsvektoren zu den Schwerpunkten der einzelnen Körper aufstellen $\vec{r}_k = \vec{r}_k\left(q_i\right)$ und daraus deren Geschwindigkeiten $\vec{v}_k = \vec{v}_k\left(q_i, \dot{q}_i\right)$ ermitteln
3. Aufstellen der kinetischen Energie $K\left(q_i, \dot{q}_i\right)$ des Gesamtsystems; bei rotierenden Körpern müssen die Rotationsanteile um den Schwerpunkt berücksichtigt werden
4. Aufstellen der potenziellen Energie $U\left(q_i\right)$ des Gesamtsystems
5. Aufstellen der Lagrange-Funktion gemäß $L\left(q_i, \dot{q}_i\right) = K\left(q_i, \dot{q}_i\right) - U\left(q_i\right)$
6. Berechnung der Ableitungen $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ und $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ für $i = 1, ..., n$

7. Auswertung der Lagrange-Gleichungen 2. Art gemäß Gleichung (1) unter Nutzung der im vorherigen Schritt berechneten, partiellen Ableitungen

Bemerkungen / Vorteile des Verfahrens

Gegenüber den Methoden der Elementaren Mechanik (Schwerpunktsatz und Drallsatz) benötigen wir keinen Freischnitt und müssen auch keine Zwangskräfte berechnen bzw. aus unserem Gleichungssystem eliminieren.