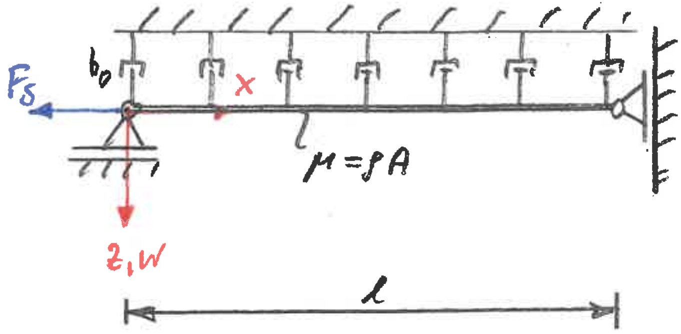
Aufgabe 87:



Prinzip von Hamilton für nicht-konservatives System

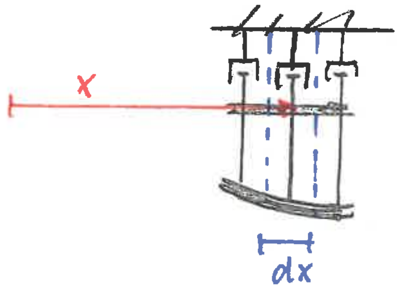
$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \delta A)\, dt = 0 \qquad (1)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta A\, dt = 0$$

δA gibt dann die virtuelle Arbeit der nicht-konservativen Kräfte an!

In unserem Fall liegt eine nicht-konservative Streckenlast vor, d.h.

δA muss aus der Integration über die Länge ermittelt werden



$$d(\delta A) = -q_0(x,t)\, \delta w(x,t)\, dx$$

$$\delta A = -\int_0^l q_0(x,t)\, \delta w(x,t)\, dx$$

mit $q_0(x,t) = b_0\, \dot{w}(x,t)$

$$\Rightarrow \delta A = -b_0 \int_0^l \dot{w}(x,t)\, \delta w(x,t)\, dx \qquad (2)$$

Kinetische Energie : $K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A\, \dot{w}^2(x,t)\, dx$

Potentielle Energie : $U = \frac{1}{2} F_S \int_0^l w'^2(x,t)\, dx$

Lagrange-Funktion: $L = K - U$

$$L = \frac{1}{2}\int_0^\ell \rho A \dot{w}^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}F_S\int_0^\ell w'^2(x,t)\,dx \quad (3)$$

Variation der Lagrange-Funktion

$$\delta L = \underbrace{\rho A}_{=\mu}\int_0^\ell \dot{w}(x,t)\,\delta\dot{w}(x,t)\,dx - F_S\int_0^\ell w'(x,t)\,\delta w'(x,t)\,dx \quad (4)$$

Einsetzen von (2) und (4) in das Hamiltonsche Prinzip

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^\ell \mu\dot{w}(x,t)\,\delta\dot{w}(x,t)\,dx - F_S\int_0^\ell w'(x,t)\,\delta w'(x,t)\,dx - b_0\int_0^\ell \dot{w}(x,t)\,\delta w(x,t)\,dx\right\}dt = 0$$

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t_1}\int_0^\ell \mu\dot{w}(x,t)\cdot\delta\dot{w}(x,t)\,dx\,dt}_{=I} - \underbrace{\int_{t_0}^{t_1}\int_0^\ell F_S w'(x,t)\,\delta w'(x,t)\,dx\,dt}_{=II} - \underbrace{\int_{t_0}^{t_1}\int_0^\ell b_0\dot{w}(x,t)\,\delta w(x,t)\,dx\,dt}_{=III} = 0 \quad (5)$$

<u>N.R.:</u> $I = \int_0^\ell\int_{t_0}^{t_1} \mu\dot{w}(x,t)\,\delta\dot{w}(x,t)\,dt\,dx$

$$= \int_0^\ell\left\{\left[\mu\dot{w}(x,t)\cdot\delta w(x,t)\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\mu\ddot{w}(x,t)\,\delta w(x,t)\,dt\right\}dx$$

$$= \int_0^\ell\left\{\mu\dot{w}(x,t_1)\cdot\underbrace{\delta w(x,t_1)}_{=0} - \mu\dot{w}(x,t_2)\cdot\underbrace{\delta w(x,t_2)}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1}\mu\ddot{w}\,\delta w\,dt\right\}dx$$

An den Zeiträndern verschwinden die virtuellen Verschiebungen!

$$I = -\int_0^\ell\int_{t_0}^{t_1}\mu\ddot{w}(x,t)\,\delta w(x,t)\,dt\,dx = -\int_{t_0}^{t_1}\int_0^\ell \mu\ddot{w}(x,t)\,\delta w(x,t)\,dx\,dt \quad (6)$$

$$\mathrm{II} = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{l} F_S\, w'(x,t)\, \delta w'(x,t)\, dx\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[F_S\, w'(x,t)\, \delta w(x,t) \right]_0^{l} - \int_0^{l} F_S\, w''(x,t)\, \delta w(x,t)\, dx \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_S\, w'(l,t)\cdot \delta w(l,t) - F_S\, w'(0,t)\cdot \underbrace{\delta w(0,t)}_{=0} - \int_0^{l} F_S\, w''\, \delta w\, dx \right\} dt$$

Geometrische Randbedingungen: $w(0,t) = 0 \Rightarrow \delta w(0,t) = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{II} = \int_{t_0}^{t_1} F_S\, w'(l,t)\, \delta w(l,t)\, dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{l} F_S\, w''(x,t)\, \delta w(x,t)\, dx\, dt \qquad (7)$$

(6) und (7) in (5) einsetzen

$$- \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{l} \mu\, \ddot{w}(x,t)\, \delta w(x,t)\, dx\, dt - \int_{t_0}^{t_1} F_S\, w'(l,t)\, \delta w(l,t)\, dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{l} F_S\, w''(x,t)\, \delta w(x,t)\, dx\, dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^{l} b_0\, \dot{w}(x,t)\, \delta w(x,t)\, dx\, dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{l} \underbrace{\left[F_S\, w''(x,t) - \mu\, \ddot{w}(x,t) - b_0\, \dot{w}(x,t) \right]}_{=0} \delta w(x,t)\, dx\, dt$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{F_S\, w'(l,t)}_{=0}\, \delta w(l,t)\, dt \overset{!}{=} 0 \qquad (8)$$

Da die virtuelle Verrückung $\delta w(x,t)$ für alle $x \in (0,l)$ beliebig ist, muss die eckige Klammer im Integranden des Doppelintegrals verschwinden, wenn das Doppelintegral selbst "0" ergeben soll.

$$\Rightarrow \quad \mu \ddot{w}(x,t) + b_0 \dot{w}(x,t) = F_S w''(x,t) \qquad (9)$$

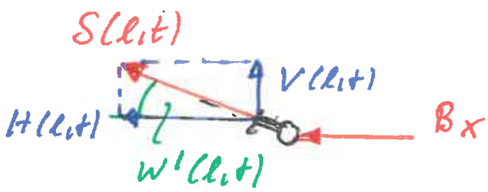
Bewegungsdgl. der viskos gedämpften Saite!

Für $x = l$ ist $\delta w(l,t)$ aber genauso beliebig. Für alle denkbaren $\delta w(l,t)$ kann das Zeitintegral also nur dann 0 sein, wenn

$$F_S w'(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{w'(l,t) = 0}} \qquad (10)$$

gilt. Am rechten Ende ergibt sich demnach zu jeder Zeit eine horizontale Tangente. (10) ist eine physikalische RB, die daraus resultiert, dass das Seil am rechten Ende keine Vertikalkomponente aufnimmt.

Zum Vgl.:



$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{V(l,t) = 0}$$

$$\Rightarrow \quad w'(l,t) = \frac{V(l,t)}{H(l,t)} = \underline{\underline{0}}$$