Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 6.

Statische Bestimmtheit. Berechnung der Lagerreaktionen.

Literatur: *Hauger, Schnell und Groß.* Technische Mechanik 1 (Statik), 5.1.3, 5.2, 5.3.1-5.3.3

I. Definitionen zur statischen Bestimmtheit

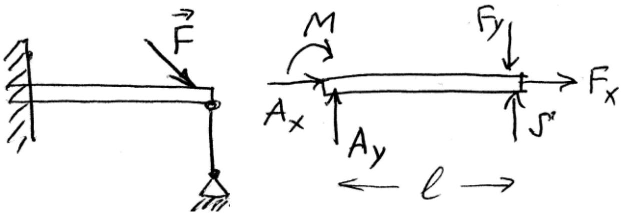
f - Zahl der Freiheitsgrade;
r - Gesamtwertigkeit aller *äußeren* Lager;
v - Gesamtwertigkeit aller *inneren* Bindungen.
n sei die Differenz zwischen dem Freiheitsgrad und der Gesamtwertigkeit: *n=f-r-v*.

3 Fälle sind möglich:

n<0 n-fach unbestimmtes System
n=0 statisch bestimmt
n>0 n-fach verschieblich

II. Beispiele

B1. Ein einfach statisch unbestimmtes System



Die Gleichgewichtsbeziehungen sind

$$A_x + F_x = 0,$$
$$A_y + S - F_y = 0,$$
$$-M + Sl - F_y l = 0.$$

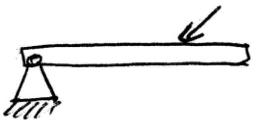
Daraus folgt:

$A_x = -F_x,\ A_y = -S + F_y,\ M = Sl - F_y l$.

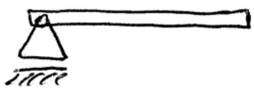
Über *eine* Kraft (z.B. *S*) können wir frei verfügen, die anderen sind dann eindeutig bestimmt. ⇒ *Einfach* unbestimmtes System.

B2.

einfach verschieblich



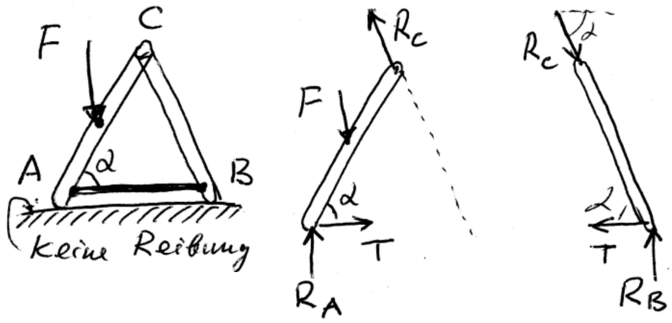
zweifach verschieblich



Bemerkung: Statische Unbestimmtheit bedeutet nicht, daß sich überhaupt keine Reaktionen eindeutig bestimmen lassen. Auch eine kinematisch unbestimmte Aufgabe kann in Spezialfällen eine eindeutige Lösung haben. Hier ein Beispiel dafür:

B3. Ein einfach verschiebliches System

Zwei Stäbe der Länge *l* sind oben mit einem Gelenk und unten mit einem Faden verbunden. In der Mitte des einen Stabes greift eine Kraft $\vec{F}$ an (das Gewicht der Stäbe vernachlässigen wir). Zu bestimmen sind die Reaktionskräfte.



Lösung: Zunächst überlegen wir, ob dieses System statisch bestimmt ist. $n = 6 - 5 = 1 \Rightarrow$ einfach beweglich.

Gleichgewichtsbedingungen:
Stab 1:

x: $0 = T - R_C \cos\alpha$

y: $0 = R_A - F + R_C \sin\alpha$

$$M^{(A)}: 0 = -\frac{Fl}{2}\cos\alpha + R_C \sin\alpha \cdot l\cos\alpha + R_c \cos\alpha \cdot l\sin\alpha$$

Stab 2:

x: $-T + R_C \cos\alpha = 0$

y: $R_B - R_C \sin\alpha = 0$

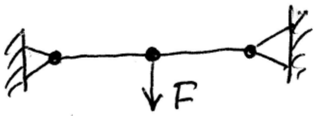
$M^{(B)}:\qquad 0 = 0$

Ergebnis:

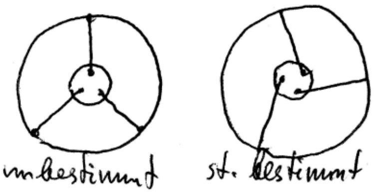
$$R_C = \frac{F}{4\sin\alpha},\quad T = R_C\cos\alpha = \frac{F}{4}\cot\alpha,$$
$$R_B = R_C \sin\alpha = \frac{F}{4},\quad R_A = F - \frac{F}{4} = \frac{3}{4}F.$$

B4. Ausnahmefälle

$n = 6 - 6 = 0$.



Die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit ist erfüllt. Trotzdem gibt es keine statischen Lösungen (mit endlichen Reaktionskräften).

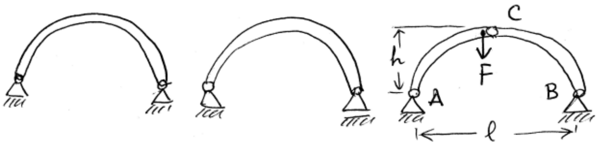


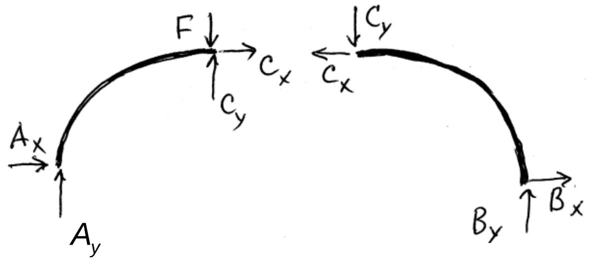
Rad mit Speichen (zweidimensional):

In beiden Fällen gilt: $n = 3 - 3 = 0$. Im linken Bild kann jedoch die Bedingung für das Momentengleichgewicht nicht erfüllt werden.

Rad mit Speichen (dreidimensional): Wie viele Speichen braucht man für eine statisch bestimmte Lagerung eines Rades?

B5. Dreigelenkbogen ($f=6$, $r=4$, $v=2$, $n=0 \Rightarrow$ statisch bestimmt).





x: $A_x + C_x = 0$ $\quad -C_x + B_x = 0$

y: $A_y + C_y - F = 0$ $\quad B_y - C_y = 0$

$M^{(A,B)}: C_y \frac{l}{2} - F\frac{l}{2} - C_x h = 0 \quad C_y \frac{l}{2} + C_x h = 0$

Umformung:

$A_x = -C_x$ $\qquad C_x = -\frac{Fl}{4h}$

$B_x = C_x = -A_x$ $\qquad B_x = -\frac{Fl}{4h}$

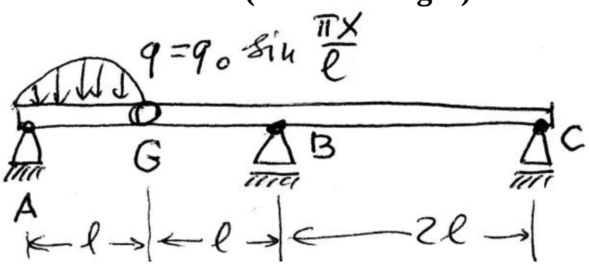
$C_y = -C_x \frac{2h}{l} = A_x \frac{2h}{l}$ $\qquad C_y = \frac{F}{2}$

$B_y = C_y = A_x \frac{2h}{l}$ $\qquad B_y = \frac{F}{2}$

$A_y = F - C_y = F - A_x \frac{2h}{l}$ $\qquad A_y = \frac{F}{2}$

$A_x \frac{2h}{l}\frac{l}{2} - F\frac{l}{2} + A_x h = 0$ $\qquad A_x = \frac{Fl}{4h}$

B6. Gelenkbalken (Gerber-Träger)



r - Wertigkeit der Lager.

g - Anzahl der Gelenke des Balken.

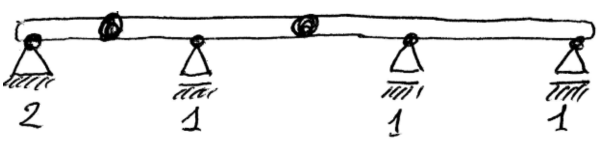
$N = g + 1$ - Zahl der "Teilbalken"
$f = 3N = 3(g+1)$.

Bedingung für die statische Bestimmtheit:

$f - r - 2g = 0 \;\Rightarrow\; r + 2g = 3(g+1)$

$$\boxed{g = r - 3}$$

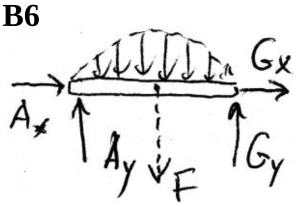
Beispiel:



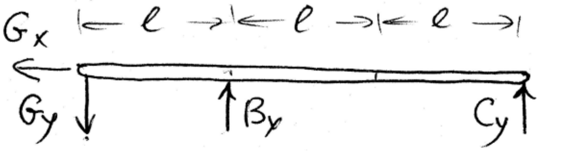
$r = 5 \;\Rightarrow\; g = r - 3 = 2$

Lösung der Aufgabe B6

$$F = \int_0^l q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l q_0 \sin\frac{\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$



$$= -q_0 \frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l}\Big|_0^l = -q_0\frac{l}{\pi}\left[\cos\pi - \cos 0\right] = \frac{2lq_0}{\pi}$$



Erster Teilbalken: $\qquad$ Zweiter Teilbalken:

x: $A_x + G_x = 0$ $\qquad -G_x = 0$

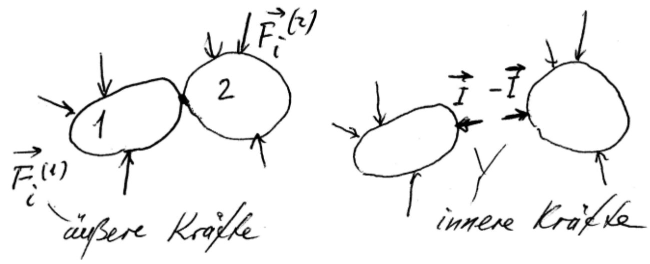
y: $A_y - F + G_y = 0$ $\qquad -G_y + B_y + C_y = 0$

$M^{(A)}: -Fl/2 + G_y l = 0$; $M^{(G)}: B_y l + C_y 3l = 0$

Aus diesen sechs Gleichungen folgt:

$G_x = 0$, $A_x = 0$, $G_y = F/2$, $A_y = F/2$, $C_y = -F/4$, $B_y = 3F/4$.

III. "Das Erstarrungsprinzip"



Erster Körper: $\sum \vec{F}_i^{(1)} + \vec{I} = 0$

Zweiter Körper: $\sum \vec{F}_i^{(2)} - \vec{I} = 0$

Daraus folgt: $\sum \vec{F}_i^{(1)} + \sum \vec{F}_i^{(2)} = 0$:

> Für ein System im Gleichgewicht ist die Summe aller <u>*äußeren*</u> Kräfte gleich Null (innere Kräfte bleiben unberücksichtigt).
> Dasselbe gilt für Momente.

$\Rightarrow$ Wir dürfen an einem Mehrkörpersystem als Ganzes Gleichgewichtsgleichungen aufstellen, als ob es starr wäre.
Das gilt auch für jedes Teilsystem.