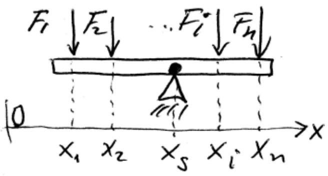
I. Schwerpunkt einer Gruppe paralleler Kräfte

(A) Auf einen Stab greifen N parallele Kräfte an. Wo muss man den Balken unterstützen, damit er im Gleichgewicht bleibt? (Dieser Punkt heißt der Schwerpunkt des Kraftsystems).



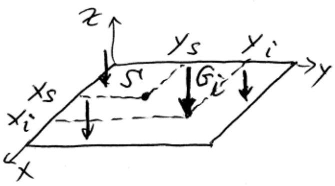
Lösung: Das Kraftmoment bezüglich des Punktes S muss verschwinden:

$$(x_1 - x_s)F_1 + ...(x_i - x_s)F_i + ... = \sum (x_i - x_s)F_i = 0$$

oder $\sum x_i F_i - x_s \sum F_i = 0$. Daraus folgt

$$\boxed{x_s = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}}$$

(B) Dasselbe gilt für ein System von Kräften, die an einer Platte angreifen.



Lösung: Momentengleichgewicht bezüglich des Schwerpunkts S:

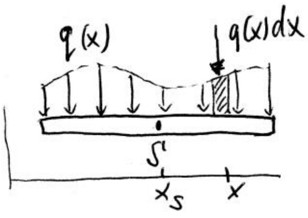
um die x-Achse: $\sum (y_i - y_s)G_i = 0$,

um die y-Achse: $\sum (x_i - x_s)G_i = 0$.

Daraus folgt: $\boxed{x_s = \frac{\sum x_i G_i}{\sum G_i}}$, $\boxed{y_s = \frac{\sum y_i G_i}{\sum G_i}}$.

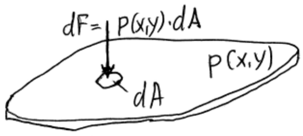
II. Kontinuierlich verteilte Kräfte

Eine auf einer *Linie* kontinuierlich verteilte Kraft wird durch die *Streckenlast* $q(x)$ charakterisiert. Die auf ein infinitesimal kleines Längenelement dl wirkende Kraft ist gleich $dF = q(x)dx$. Bei kontinuierlich verteilten Kräften werden in der Schwerpunktdefinition die Summen durch Integrale ersetzt:



$$\boxed{x_s = \frac{\sum\limits_{\Delta x_i \to 0} x_i q(x_i)\Delta x_i}{\sum\limits_{\Delta x_i \to 0} q(x_i)\Delta x_i} = \frac{\int x\, q(x)\, dx}{\int q(x)\, dx}}.$$

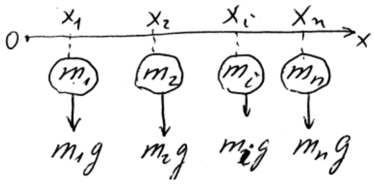
Im *zweidimensionalen* Fall wird eine kontinuierlich verteilte Kraft durch den *Druck* $p = p(x, y)$ charakterisiert. Die auf ein infinitesimal kleines Flächenelement dA wirkende Kraft ist gleich $dF = p(x, y)\, dA$. Für die Schwerpunktkoordinate ergibt sich



$$\boxed{x_s = \frac{\sum\limits_{\Delta x_i \to 0} x_i p(x_i, y_i)\Delta A_i}{\sum\limits_{\Delta x_i \to 0} p(x_i, y_i)\Delta A_i} = \frac{\int x p(x, y) dA}{\int p(x, y) dA}} \quad \boxed{y_s = \frac{\int y p(x, y) dA}{\int p(x, y) dA}}$$

III. Schwerpunkt von Schwerekräften

Den wichtigsten Sonderfall eines Systems von parallelen Kräften stellen Schwerekräfte dar. Die auf einen Körper mit der Masse m_i wirkende Kraft ist gleich $F_i = m_i g$. Alle Kräfte haben dieselbe Richtung. Aus der allgemeinen Formel für die Koordinate des Schwerpunkts folgt:



$$\boxed{x_s = \frac{\sum x_i m_i g}{\sum m_i g} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum x_i m_i}{m}}$$

(m ist hier die Gesamtmasse aller Körper).

Ähnliches gilt für die y und z-Koordinaten des Schwerpunkts: $\boxed{y_s = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}}$, $\boxed{z_s = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}}$.

Bei kontinuierlichen Körpern werden die Summen durch Integrale ersetzt:

$$\boxed{x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \Rightarrow \frac{\int x\, dm}{m}}, \boxed{y_s = \frac{\int y\, dm}{m}}, \boxed{z_s = \frac{\int z\, dm}{m}}$$

Das Differential der Masse kann als $dm = \rho dV$ geschrieben werden, wobei ρ die Dichte des Körpers ist und dV ein infinitesimal kleines Volumen. Somit nehmen die obigen Gleichungen die folgende Form an:

$$\boxed{x_s = \frac{\int x \rho\, dV}{m}} \quad \boxed{y_s = \frac{\int y \rho\, dV}{m}} \quad \boxed{z_s = \frac{\int z \rho\, dV}{m}}.$$

IV. Berechnung von Integralen

Integrieren ist eine Umkehroperation zum Differenzieren: Eine Funktion $G(x)$, deren Ableitung gleich $g(x)$ ist, heißt ein *unbestimmtes Integral* von $g(x)$ (auch *Stammfunktion* von $g(x)$). Eine Tabelle von Ableitungen ist daher gleichzeitig - rückwärts gelesen - eine Tabelle von unbestimmten Integralen:

Funktion $f(x)$	Ableitung $g(x)=f'(x)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	Funktion $g(x)$	Stammfunktion (unbestimmtes Integral) $G(x)=\int g(x)\mathrm{d}x$
x	1	1	x
x^2	$2x$	x	$x^2/2$
x^3	$3x^2$	x^2	$x^3/3$
x^n	nx^{n-1}	x^{n-1}	x^n/n
$x^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$x^{-1/2}$	$2x^{1/2}$
$x^{3/2}$	$\frac{3}{2}x^{1/2}$	$x^{1/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2}$
e^{kx}	ke^{kx}	e^{kx}	e^{kx}/k
$\sin ax$	$a\cos ax$	$\cos ax$	$(\sin ax)/a$
$\cos ax$	$-a\sin ax$	$\sin ax$	$-(\cos ax)/a$
$\ln x$	$1/x$	$1/x$	$\ln x$

Die Berechnung von *bestimmten* Integralen beruht auf der Newtonschen Gleichung:

$$\boxed{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = G(b)-G(a) = G(x)\Big|_a^b}.$$

Bei der Berechnung von Integralen wird auch der Begriff "Differential" oft benutzt:

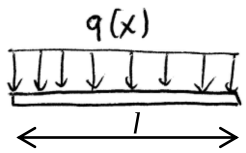
$$\boxed{\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x}.$$

Zum Beispiel, $\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x$.

Unter der Benutzung des Begriffs "Differential" wird die Eigenschaft, daß Integrieren und Differenzieren zu einander Umkehroperationen sind, besonders klar:

$$\int \mathrm{d}f(x) = f(x), \qquad \mathrm{d}\int g(x)\,\mathrm{d}x = g(x)\,\mathrm{d}x.$$

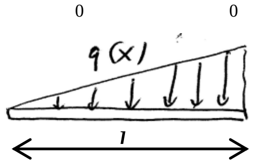
V. Beispiele



B1. Zu berechnen ist der Schwerpunkt einer konstanten Streckenlast.

Lösung: $q(x)=q_0=const$.

$$x_s=\frac{\int_0^l xq(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^l q(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^l xq_0\mathrm{d}x}{\int_0^l q_0\mathrm{d}x}=\frac{\cancel{q_0}\int_0^l x\,\mathrm{d}x}{\cancel{q_0}\int_0^l \mathrm{d}x}=\frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^l}{x\big|_0^l}=\frac{l}{2}$$

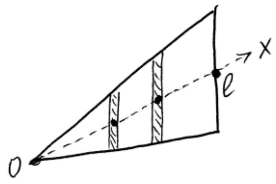


B2. Zu berechnen ist der Schwerpunkt einer linear steigenden Streckenlast.

Lösung: $q(x)=ax$

$$x_s=\frac{\int_0^l xq(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l q(x)\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^l xax\mathrm{d}x}{\int_0^l ax\mathrm{d}x}=\frac{\left[x^3/3\right]_0^l}{\left[x^2/2\right]_0^l}=\frac{2}{3}l.$$

B3. Zu berechnen ist die Lage des Schwerpunktes eines homogenen Dreiecks.



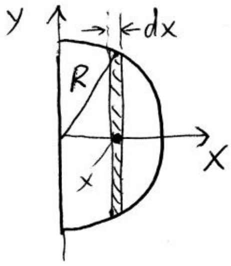
Lösung: Bei jedem dünnen Streifen liegt der Schwerpunkt in der Mitte und kann durch die in der Mitte angreifende Resultierende ersetzt werden. Angriffspunkte aller solcher "Teilresultierenden" liegen auf der Seitenhalbierenden des Dreiecks. Sie stellen eine linear steigende Streckenlast dar.

Der Schwerpunkt teilt somit die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 (siehe Beispiel 2).

B4. Schwerpunkt eines Halbkreises

Die Fläche des dünnen Streifens ist $\mathrm{d}A=2y\,\mathrm{d}x$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Die Koordinate des Schwerpunkts berechnet sich daher als

$$x_s=\frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int x\sigma\mathrm{d}A}{\int \sigma\mathrm{d}A}=\frac{\int x\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A}$$



$$=\frac{\int x\,\mathrm{d}A}{A}=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

(σ ist die Flächendichte der Platte).

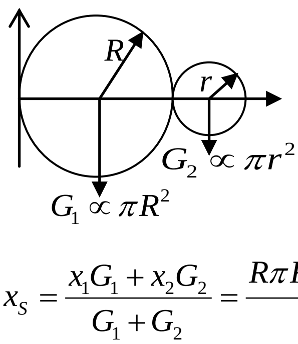
Das letzte Integral berechnet sich z.B. mit Hilfe der Substitution $R^2-x^2=z$, $-2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}z$, $x\big|_0^R \to z\big|_{R^2}^0 \Rightarrow$

$$x_s=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi R^2}\int_{R^2}^0\sqrt{z}\,\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right]_{R^2}^0=\frac{4R^3}{3\pi R^2}=\frac{4R}{3\pi}\approx 0.424R$$

VI. Zusammengesetzte Figuren

B5. Die Koordinaten der Angriffspunkte der



Kräfte G_1 und G_2 sind $x_1=R$, $x_2=2R+r$. Für die Koordinate des Schwerpunktes ergibt sich

$$x_S=\frac{x_1G_1+x_2G_2}{G_1+G_2}=\frac{R\pi R^2+(2R+r)\pi r^2}{\pi\left(R^2+r^2\right)}$$

$$=\frac{R^3+r^3+2Rr^2}{R^2+r^2}$$

B6.