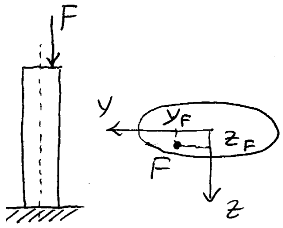
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 23. **Teil 2: Elastostatik**

Außermittiger Zug/Druck. Querschnittskern. Einfluß des Schubes. Spannungstensor

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.9, 4.6.2, 1.1, 2.1, 2.2**

I. Außermittiger Zug (Druck)



Wir betrachten eine Säule unter einer exzentrischen Druckkraft *F*. Die Kraft erzeugt sowohl eine Dehnung in der Achsenrichtung als auch Biegemomente um die Achsen *y* und *z:*

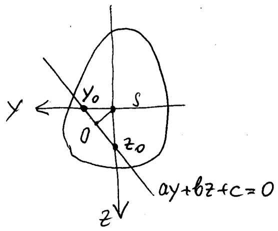
$M_z = Fy_F$, $M_y = -Fz_F$, $N = -F$.

Die Lage der neutralen Fläche ist

$$\frac{Fz_F}{I_y} z + \frac{Fy_F}{I_z} y + \frac{F}{A} = 0, \quad \boxed{\frac{z_F}{I_y} z + \frac{y_F}{I_z} y + \frac{1}{A} = 0}.$$

Ein bißchen analytische Geometrie.

Die Gleichung einer Gerade $ay + bz + c = 0$ kann in der Form $y/y_0 + z/z_0 = 1$, mit $y_0 = -c/a$, $z_0 = -c/b$, geschrieben werden.

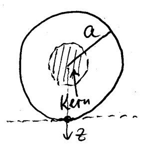


Der Abstand vom Koordinatenursprung zur Geraden ist gleich

$$OS = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2}+\frac{1}{z_0^2}}} = \frac{1/A}{\sqrt{\left(\frac{z_F}{I_y}\right)^2 + \left(\frac{y_F}{I_z}\right)^2}}$$

Damit die gesamte Fläche auf Druck beansprucht wird, muss die neutrale Fläche *außerhalb* des Querschnitts liegen. Die Gesamtheit aller Angriffspunkte der Kraft, für die diese Bedingung erfüllt ist, heißt **Querschnittskern.**

B1. Kern eines runden Querschnitts

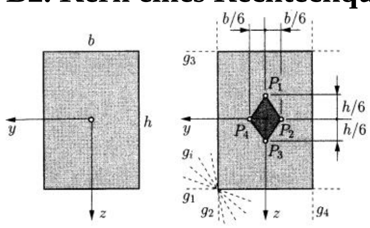


$$OS = \frac{1/\pi a^2}{\sqrt{\left(\frac{z_F}{\pi a^4/4}\right)^2}} \ge a$$

$$\Rightarrow z_F \le a/4.$$

Der Radius des Kerns ist $a/4$.

B2. Kern eines Rechteckquerschnitts



Betrachten wir zunächst als Nullinien die Seiten des Querschnitts:

1) $z_0 = h/2$, $y_0 = \infty$. Das bedeutet, dass in der Gleichung der Nulllinie $y/y_0 + z/z_0 = 1$ den Term mit *y* gegen Null strebt.

Die Gleichung der Nullinie $\frac{z_F}{I_y} z + \frac{y_F}{I_z} y + \frac{1}{A} = 0$ reduziert sich auf

$$\frac{z_F}{I_y} z + \frac{1}{A} = 0 \text{ mit } z = z_0 = \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{z_F}{I_y}\frac{h}{2} + \frac{1}{A} = 0$$

$$\Rightarrow z_F = -\frac{2I_y}{Ah} = -\frac{2bh^3}{12bh^2} = -\frac{h}{6}, \; y_F = 0.$$

2) $z_0 = \infty$, $y_0 = -b/2 \Rightarrow z_F = 0$, $y_F = b/6$.

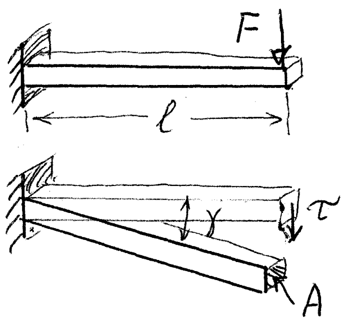
3) $z_0 = -h/2$, $y_0 = \infty \Rightarrow z_F = h/6$, $y_F = 0$.

4) $z_0 = \infty$, $y_0 = b/2 \Rightarrow z_F = 0$, $y_F = -b/6$.

Für eine beliebige Gerade, die durch eine Ecke 1 geht, ist $z_0 = h/2$, $y_0 = b/2$. Die Gleichung $\frac{z_F}{I_y} z_0 + \frac{y_F}{I_z} y_0 + \frac{1}{A} = 0$ stellt eine Gerade auf der Ebene (z_F, y_F) dar. Der Querschnittskern hat somit die Form eines Rhombus.

II. Einfluß des Schubes

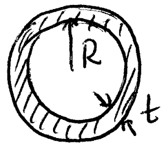
Bei einer Belastung durch eine Querkraft ist die Durchbiegung durch zwei Deformationsarten verursacht:



(a) "reine Biegung" unter Wirkung eines Momentes und (b) eine Scherung durch die Querkraft. Beispielsweise ist bei einem Kragbalken die Absenkung des Angriffspunktes durch Biegung gleich $w_{Biegung} = \frac{Fl^3}{3EI}$. Die Absenkung durch Schub ist gleich $w_{Schub} = l\gamma = l\frac{F}{AG}$. Die gesamte Durchbiegung ist gleich

$$w = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fl}{AG}.$$

B3. Rohr



Zu bestimmen ist das Verhältnis der Schub- und Biegebeiträge in die Absenkung eines Kragbalkens mit einem dünnwandigen runden Querschnitt.

Lösung: Das gesuchte Verhältnis ist gleich

$$\frac{w_{Schub}}{w_{Biegung}} = \frac{Fl}{AG}\frac{3EI}{Fl^3}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen

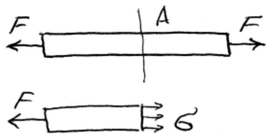
$A = 2\pi Rt$, $I = \pi R^3 t$ und $E = 2(1+\nu)G$

erhalten wir

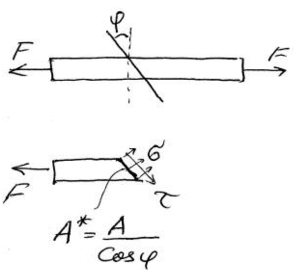
$$\frac{w_{Schub}}{w_{Biegung}} = \frac{3}{2}\frac{E}{G}\frac{R^2}{l^2} = 3(1+\nu)\frac{R^2}{l^2} \approx \left(\frac{2R}{l}\right)^2.$$

Die Beiträge werden gleich, wenn der Durchmesser des Rohres gleich seiner Länge ist. Für $l = 6R$ beträgt der Schubbeitrag ca. 10%, bei $l = 20R$ nur 1%.

III. Spannungen bei einachsiger Dehnung



Betrachten wir einen axial mit einer Kraft F belasteten Stab. Wir machen einen Schnitt senkrecht zur Achse. Die einzige Schnittgröße ist in diesem Fall die Normalkraft $N = F$. Im Schnitt wirkt eine Zugspannung $\sigma = F/A$, die wir als σ_0 bezeichnen.



Machen wir jetzt bei demselben Stab einen schrägen Schnitt (Neigungswinkel φ), so wirkt im Schnitt natürlich immer noch dieselbe axiale Kraft. Sie kann aber jetzt in eine Komponente senkrecht zum Schnitt und eine parallel dazu zerlegt werden. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$\rightarrow$: $\sigma A^*\cos\varphi + \tau A^*\sin\varphi - F = 0$,

$\uparrow$: $\sigma A^*\sin\varphi - \tau A^*\cos\varphi = 0$.

$\Rightarrow \sigma + \tau\tan\varphi = F/A$ und $\sigma\tan\varphi - \tau = 0$.

$$\Rightarrow \tau = \frac{F}{A}\frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \frac{F}{A}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{F}{2A}\sin 2\varphi,$$

$$\sigma = \frac{F}{A}\frac{1}{1+\tan^2\varphi} = \frac{F}{A}\cos^2\varphi = \frac{F}{2A}\left(1+\cos 2\varphi\right).$$

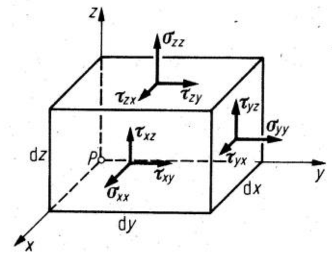
$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\varphi}, \quad \boxed{\sigma = \frac{\sigma_0}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)}$$

Tangentialspannungen erreichen ein Maximum bei $\varphi = \pi/4$. In vielen metallischen Stoffen beginnt plastische Deformation durch Gleiten in Richtung maximaler Schubspannungen (45° zur Zugachse). Bei solchen Stoffen hängen die Fließgrenzen beim Schub und beim Zug wie folgt zusammen: $\sigma_{0,c} = 2\tau_c$.

(Photo eines kleinen gedehnten Kupferkristalls)

IV. Spannungstensor

Den Spannungszustand eines Mediums charakterisiert man, indem man im gegebenen Punkt verschiedene Schnitte macht und die dort wirkenden Spannungen untersucht. Betrachten wir die drei Schnitte senkrecht zu den *x*, *y* und *z*- Achsen. Diese Schnittspannungen werden mit zwei Indizes gekennzeichnet,



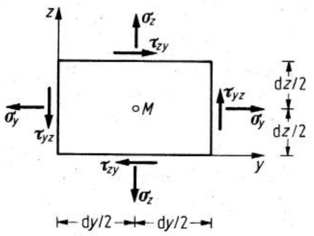
von denen der erste den Normalvektor zum Schnitt angibt und der zweite die Richtung der im Schnitt wirkenden Kraftkomponente. Insgesamt gibt es 9 Spannungskomponenten, die man in einer Matrix anordnen kann:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt **Spannungstensor**.
Oft wird auch die folgende Bezeichnung benutzt:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{pmatrix}.$$

V. Symmetrie des Spannungstensors



Untersuchen wir das Momentengleichgewicht für ein infinitesimal kleines Volumenelement mit den Abmessungen d*x*, d*y* und d*z* um eine zur *x*-Achse parallele Achse (bezüglich des Mittelpunktes):

$$2\frac{\mathrm{d}y}{2}\tau_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z - 2\frac{\mathrm{d}z}{2}\tau_{zy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \;\Rightarrow\; \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

Es gibt somit nur 6 unabhängige Komponenten des Spannungstensors.