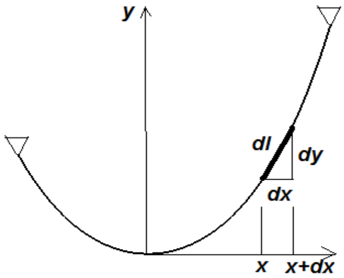
Seile und Ketten - Fortsetzung, Schnittgrößen bei Bogen, Fachwerkoptimierung

I. Seil unter Eigengewicht



In der vorigen Vorlesung haben wir festgestellt, dass die Form $y = y(x)$ eines freihängenden homogenen Seils (oder einer Kette) der folgenden Differentialgleichung genügt (Kettengleichung):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{oder} \quad y'' = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+(y')^2}\,.$$

Bezeichnen wir $y' = u$, dann gilt $y'' = u'$ und die Kettengleichung nimmt die Form

$$u' = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+u^2} \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dx} = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+u^2} \text{ an.}$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{q_0}{H}dx\,.$$

Diese Gleichung kann nun integriert werden:

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int\frac{q_0}{H}dx + C_1 = \frac{q_0}{H}x + C_1\,.$$

Das Integral auf der linken Seite berechnen wir mit der Substitution $\left|\begin{matrix} u = \sinh\varphi \\ du = \cosh\varphi\, d\varphi \end{matrix}\right|$:

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int\frac{\cosh\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1+\sinh^2\varphi}} = \int\frac{\cosh\varphi\, d\varphi}{\cosh\varphi} = \varphi\,.$$

Somit erhalten wir

$$\varphi = \frac{q_0}{H}x + C_1 \quad \Rightarrow \quad u = \sinh\left(\frac{q_0}{H}x + C_1\right).$$

Diese Gleichung schreiben wir in der Form

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{q_0}{H}x + C_1\right)$$

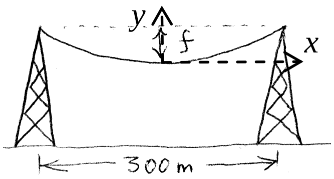
Integration ergibt

$$y(x) = \int\sinh\left(\frac{q_0}{H}x + C_1\right)dx + C_2 \quad \text{oder}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{H}{q_0}\cosh\left(\frac{q_0}{H}x + C_1\right) + C_2} \qquad (1)$$

Die Form eines frei hängenden Seils oder einer frei hängenden Kette wird durch einen Kosinus Hyperbolicus beschrieben (*Kettenlinie*).

B1. Ein Kabel ($q_0 = 120N/m$) soll zwischen zwei Masten im Abstand $l = 300m$ so aufgehängt werden, dass der Durchhang $f = 60m$ beträgt. Wie groß sind die maximale Seilkraft und die Seillänge L?



Lösung: Wir legen das Koordinatensystem so, daß der Koordinatenursprung mit dem tiefsten Punkt des Seils zusammenfällt. Dann gilt:

$$y'(0) = \sinh C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

und

$$y(0) = \frac{H}{q_0}\cosh 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{H}{q_0}\,.$$

Die Form des Kabels ist

$$y(x) = \frac{H}{q_0}\cosh\left(\frac{q_0}{H}x\right) - \frac{H}{q_0} = \frac{H}{q_0}\left[\cosh\left(\frac{q_0}{H}x\right) - 1\right].$$

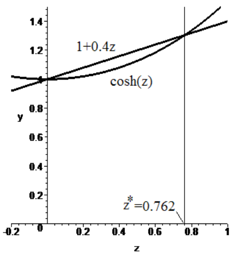
Die unbekannte Konstante H folgt aus der Forderung $y(l/2) = f$:

$$\frac{H}{q_0}\left(\cosh\left(\frac{q_0 l}{2H}\right) - 1\right) = f$$

oder

$$\boxed{\cosh\left(\frac{q_0 l}{2H}\right) - 1 = \left(\frac{q_0 l}{2H}\right)\frac{2f}{l}}\,. \qquad (2)$$

Indem wir einen neuen Parameter $z = \left(\frac{q_0 l}{2H}\right)$ einführen, erhalten wir



$\cosh z - 1 = 2zf/l$.

Mit $f/l = 60/300 = 2/5$ folgt $\cosh z - 1 = \frac{4}{5}z$.

Numerische oder grafische Lösung dieser Gleichung ergibt: $z^* = 0{,}762 \;\Rightarrow\; \frac{q_0 l}{2H} = 0{,}762 \;\Rightarrow$

$$H = \frac{q_0 l}{2\cdot 0{,}762} = \frac{120\cdot 300}{2\cdot 0{,}762} = 23{,}6\cdot 10^3 N = 23{,}6kN.$$

Die Seilkraft errechnet sich zu $S = H\sqrt{1+y'^2}$. Sie nimmt den maximalen Wert bei $x = \pm l/2$ an: $S = H\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{q_0}{H}\frac{l}{2}\right)} = H\cosh\left(\frac{q_0}{H}\frac{l}{2}\right)$.

Aus (2) folgt, dass $\cosh\left(\frac{q_0}{H}\frac{l}{2}\right) = 1 + \frac{q_0 f}{H}$ ist.

Für die Seilkraft ergibt sich

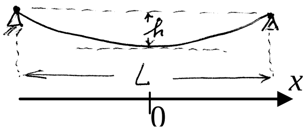
$$S = H\cosh\left(\frac{q_0}{H}\frac{l}{2}\right) = H + q_0 f = 30{,}8kN\,.$$

Die Länge des Kabels berechnet sich zu

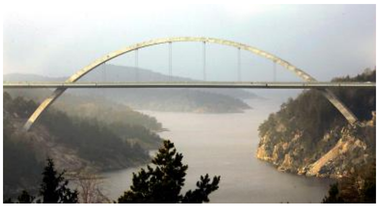
$$L = 2\int_0^{l/2} \sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2} \cosh\left(\frac{q_0}{H}x\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2H}{q_0}\sinh\left(\frac{q_0}{H}x\right)\Bigg|_0^{l/2} = \frac{2H}{q_0}\sinh\left(\frac{q_0 l}{2H}\right) =$$
$$= \frac{2\cdot 23{,}6\cdot 10^3}{150}\sinh\left(0{,}762\right) \approx 330m$$

II. Momentenfreie Bögen

Ein Seil kann keinen Biegemomenten widerstehen. Seine Gleichgewichtsform gibt daher die Form eines *momentenfreien Bogens*, welcher auf Zug beansprucht ist, an. In der vorigen Vorlesung haben wir die

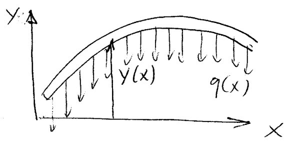


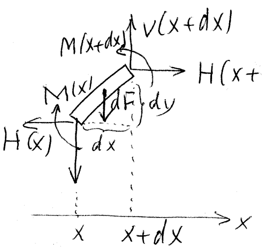
Form eines Brückenseils zu $y = \frac{4hx^2}{L^2}$ berechnet. *Sie hängt nicht von der Größe der Streckenlast* q_0 *ab!* Bei einer beliebigen homogenen Änderung der Streckenlast ($q_0 = konst$) behält das Seil die gleiche Form und bleibt momentenfrei. Das gilt auch für *negative* q_0.



In diesem Fall haben wir es mit einem *momentenfreien Bogen* zu tun, welcher auf Druck beansprucht ist. In der Baustatik nennt man diese Form *Stützlinie.*

III. Schnittgrößen bei Bögen





Gegeben sei ein gebogener Balken (Bogen), dessen Form durch die Funktion $y = y(x)$ gegeben ist.

Auf ihn wirke in vertikaler Richtung eine Streckenlast $q(x)$.

Zu bestimmen ist der Verlauf des Biegemomentes im Bogen.

Lösung: Wir schneiden ein infinitesimal kleines Element des Bogens frei. Aus dem Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung folgt

$$H(x+\mathrm{d}x) = H(x) \Rightarrow \boxed{H(x) = konst = H}. \qquad (3)$$

Gleichgewicht in vertikaler Richtung ergibt

$$V(x+\mathrm{d}x) - V(x) - q(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Daraus folgt

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = q(x)}. \qquad (4)$$

Das Momentengleichgewicht lautet

$M(x+\mathrm{d}x) - M(x) - H\mathrm{d}y + V\mathrm{d}x = 0$ oder

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M(x)}{dx} = -V(x) + H\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}. \qquad (5)$$

Integration von (4) und Einsetzen in (5) ergibt

$$V(x) = \int q(x)\mathrm{d}x + C_1$$
$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = -\int q(x)\mathrm{d}x + H\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - C_1 \qquad (6)$$

B2. Die Form des Trägers sei $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, die Streckenlast sei konstant mit $q(x) = q_0$. An den Rändern sei er gelenkig gelagert.

<u>*Lösung:*</u> Integration von (6) ergibt

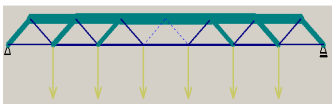
$$M(x) = -\frac{q_0 x^2}{2} + Hy(x) - C_1 x + C_2.$$

Falls wir den Koordinatenursprung in der Mitte des Trägers wählen, wird $C_1 = 0$. Aus der Randbedingung $M(R) = 0$ ergibt sich $C_2 = q_0 R^2/2$. Der Momentenverlauf lautet

$$\boxed{M(x) = q_0(R^2 - x^2)/2 + H\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

IV. Fachwerkoptimierung

Eine Brücke ist so zu optimieren, dass sie minimales Eigengewicht hat.



Lösung: Indem wir die Knoten verschieben, ändern wir die Länge der Stäbe. Außerdem kann der Querschnitt geändert werden. Nehmen wir an, alle Stäbe haben einen runden Querschnitt. Dann haben wir für das skizzierte Fachwerk 20 Knotenkoordinaten und 27 Radien als frei wählbare Parameter. Bei jeder Wahl bekommen wir einen Satz von Stabkräften. Die Zugkräfte müssen die Bedingung $F < \pi a^2 \sigma_{pl}$ und die Druckkräfte die Bedingung $|F| < \pi^2 E a^4 / l^2$ erfüllen. Das Gesamtgewicht des Fachwerkes $M = \rho \sum l_i \pi a^2$ ist zu minimieren. Mögliche optimierte Formen: