Liebe Studentin, lieber Student,

die Aufgaben auf diesem Blatt umreißen die mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten, die Sie im Kurs Statik und elementare Festigkeitslehre benötigen. Wir empfehlen diese Aufgaben schon vor Beginn des Kurses zu rechnen. Wenn Sie nicht alle Aufgaben lösen können, lassen Sie sich nicht entmutigen. Sie sollten aber in diesem Fall die Lücken in Ihren mathematischen Kenntnissen im Laufe des Semesters schließen.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen dieser und aller weiteren Aufgaben wünschen Ihnen Prof. Popov und seine Mitarbeiter.

1 Gleichungen umformen

In diesem Abschnitt soll der Umgang mit einfachen Gleichungen und Gleichungssystemen geübt werden. Dies ist essentiell um später aus physikalischen Gesetzen, welche durch Gleichungen beschrieben werden, Lösungen zu erhalten.

1.1 Bruchrechnung

1. Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:
   (a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
   (b) $\frac{14}{9} \cdot \frac{36}{35}$
   (c) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$
   (d) $2\frac{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}}$

1.2 Gleichungen umstellen

2. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.
   (a) $A = \frac{1}{2}h\,(a-x)$
   (b) $3x - bx = 1$
   (c) $\frac{x}{2} - \frac{x-2}{5} = 4$ $(x = 12)$
   (d) $A = \frac{1}{2}h\,(x-b)^2$

1.3 Algebraische Gleichungen

3. Bestimmen Sie alle Werte für x, die folgende Gleichungen lösen.
   (a) $ax^2 + bx + c = 0$
   (b) $ax^3 + bx^2 + cx = 0$
   (c) $x^4 + px^2 + q = 0$

1.4 Gleichungssysteme

4. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichungssysteme:
   (a) $3x + 2y = 4$, $-x + 7y = 2$
   (b) $3x - 5y = 0$, $x + 8y = 3$
   (c) $2y + 1 = 3x$, $4y + 2x = 14$
   (d) $6 = 5x - 3y$, $x + 3 = 2y$
   (e) $9x + 5y + 4z = 21$, $6x + 3y - 5z = 7$, $3x - 10y + 6z = 15$
   (f) $2x + 3y + 5z = 8$, $x + y - 2z = 7$, $3x - y + z = 2$

2 Funktionen

In diesem Abschnitt soll das grundlegende Verständnis wichtiger Funktionen geübt werden. Diese treten immer wieder auf, weshalb ein guter Umgang mit ihnen notwendig sein wird.

2.1 Trigonometrie

1. Erläutern Sie mit Hilfe einer Skizze den Lehrsatz von Pythagoras und die Winkelfunktionen:
   (a) $\sin\alpha$
   (b) $\cos\alpha$
   (c) $\tan\alpha$
   (d) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$
2. In der Abbildung 1 ist die Skizze eines Dreiecks gegeben. Die Strecke $\overline{\mathrm{AC}}$ hat dabei die gegebene Länge b. Zudem ist der Winkel α zwischen den Strecken $\overline{\mathrm{AC}}$ und $\overline{\mathrm{AB}}$ gegeben. Verwenden Sie die trigonometrischen Funktionen, um die Länge der Strecken $\overline{\mathrm{AB}}$ und $\overline{\mathrm{BC}}$ mit b und α auszudrücken.

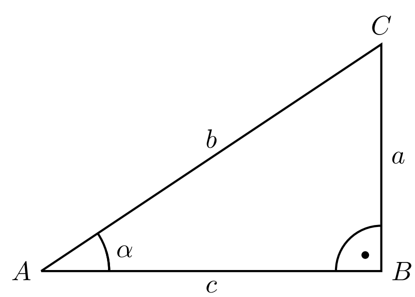


Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck mit der gegebenen Längen b und dem Winkel α.

3. Wie lauten alle reellen Lösungen von
   (a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$?
   (b) $\cos x = \frac{1}{2}$?
4. Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \sin\pi x$ im Intervall $x \in [0,\ 1]$.

2.2 Potenzen, Exponentialfunktion und Logarithmus

5. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke, wobei $x, y, n, m \in \mathbb{R}$ sind:
   (a) x^0
   (b) x^1
   (c) $x^n x^m$
   (d) $(x^n)^m$
   (e) $x^n y^n$
   (f) $\frac{x^n}{x^m}$
   (g) $x^{\frac{m}{n}}$

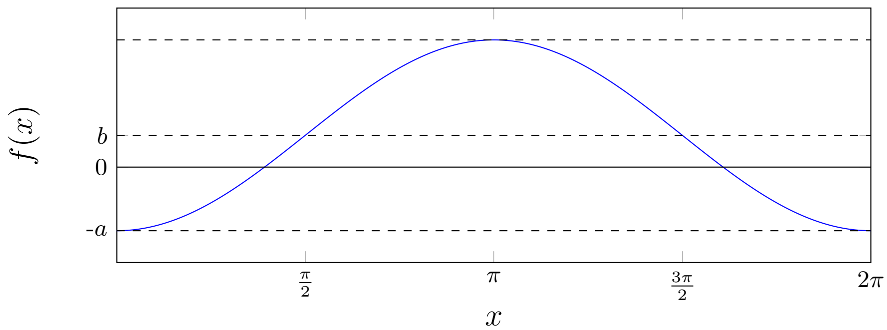
   Hinweis: Diese Umformungen sind natürlich auch möglich, wenn $x = e$ gilt
6. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke, wobei $x, y, n \in \mathbb{R}$ sind:
   (a) $\ln(1)$
   (b) $\ln(x) + \ln(y)$
   (c) $-\ln(x)$
   (d) $\ln(x) - \ln(y)$
   (e) $n\ln(x)$

2.3 Funktionen aufstellen

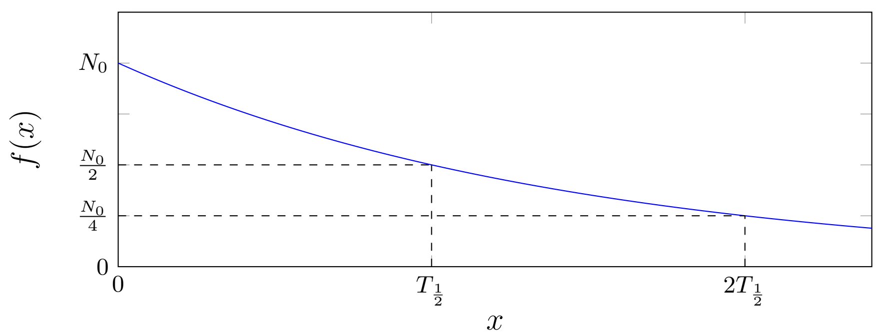
7. Wie lautet die Gleichung der Gerade, deren Graph durch die Punkte $(1, 3)$ und $(3, -1)$ verläuft? Liegt der Punkt $(5, -10)$ auf dieser Geraden?

8. Gegeben ist der Graph einer Funktion mit charakteristischen Werten. Stellen Sie die Funktion f auf, welche den entsprechenden Graph beschreibt.

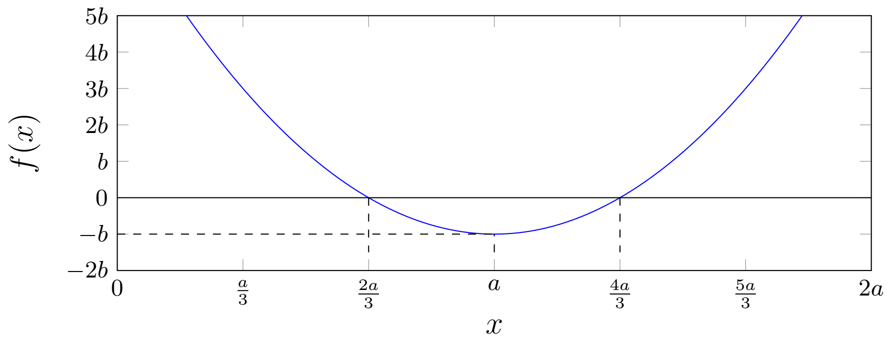
   (a) Sinusförmige Oszillation um b.



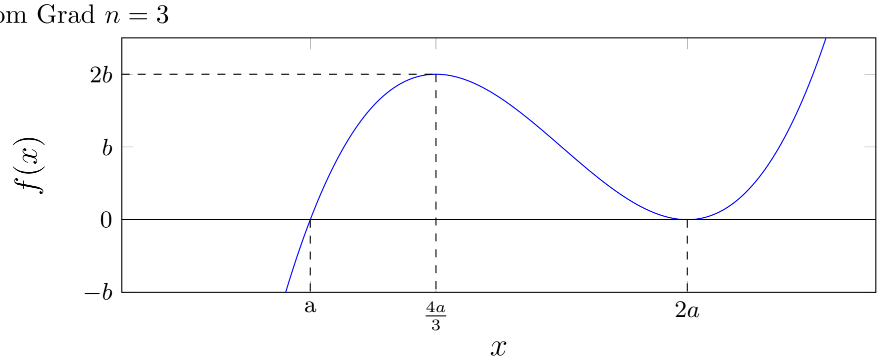
   (b) Exponentieller Abfall



   (c) Polynom vom Grad $n = 2$ (Parabel)



   (d) Polynom vom Grad $n = 3$



3 Ableitungen

Ableitungen werden sehr häufig in der Physik benötigt, weshalb in diesem Abschnitt die wichtigsten Regeln und Ableitungen geübt werden sollen.

3.1 Ableitungsregeln

1. Geben Sie die Ableitungen der angegebenen Funktionen an. Dabei sind $c, n \in \mathbb{R}$, f und g zwei skalare reellwertige Funktionen und $(\,\cdot\,)'$ bezeichnet die Ableitung nach dem Argument.
   (a) $(c)'$
   (b) $(cf(x))'$
   (c) $(f(x) + g(x))'$
   (d) $(f(x)g(x))'$
   (e) $(\frac{f(x)}{g(x)})'$
   (f) $(f(g(x)))'$
   (g) $(x^n)'$

3.2 Ableitungen wichtiger Funktionen

2. Geben Sie die Ableitungen der angegebenen Funktionen an. Dabei ist $c \in \mathbb{R}$.
   (a) $\sin(x)$
   (b) $\cos(x)$
   (c) $\tan(x)$
   (d) c^x
   (e) e^x
   (f) $\ln(x)$
   (g) $\arcsin(x)$
   (h) $\arccos(x)$
   (i) $\arctan(x)$

3.3 Ableitungen Üben

3. Bestimmen Sie jeweils $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
   (a) $f(x) = x^2 \sin(x)$
   (b) $f(x) = (a - x)^3$
   (c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$
   (d) $f(x) = e^{-3x}$
   (e) $f(x) = \sin(-\frac{x}{\pi}) \cos(-3x)$
   (f) $f(x) = \arctan(\sin(-3x))$
   (g) $f(x) = \frac{x^3-4}{2-x^2}$

3.4 Anwendungsbeispiel

4. Wie lautet die Gleichung der Tangente am Wendepunkt der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 6$?

4 Integrale

So wie Ableitungen werden auch Integrale häufig in der Physik benötigt. Deshalb sollen in diesem Abschnitt die wichtigsten Regeln und Integrale geübt werden.

4.1 Integrationsregeln

1. Bestimmen Sie die unten angegebenen Integrale. Dabei sind f und g zwei skalare reellwertige Funktionen mit den Stammfunktionen F und G. Außerdem sind $c, n \in \mathbb{R}$.
   (a) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   (b) $\int x^n\,\mathrm{d}x$
   (c) $\int cf(x)\,\mathrm{d}x$
   (d) $\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x$
   (e) $\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$
   (f) $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$
   (g) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$

4.2 Unbestimmte Integration

2. Bestimmen Sie jeweils das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) $f(x) = x^n$ mit $n \neq -1$
   (b) $f(x) = \sin(ax)$
   (c) $f(x) = x\sin(x)$
   (d) $f(x) = \frac{1}{x}$
   (e) $f(x) = \ln(x)$
   (f) $f(x) = e^{bx}$
   (g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4.3 Bestimmte Integration

3. Bestimmen Sie den Wert der jeweiligen Integrale.
   (a) $\int_0^2 (x-5)(x-1)x + 2\,\mathrm{d}x$
   (b) $\int_0^1 \frac{4x+6}{x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x$
   (c) $\int_0^1 \left(3x^2 + 2x\right) e^{-3x}\,\mathrm{d}x$
   (d) $\int_0^\pi \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$
   (e) $\int_0^2 x^2 e^x\,\mathrm{d}x$
4. Gegeben sei die Funktion f. Wie kann man den Flächeninhalt der Fläche berechnen, welche durch die Koordinatenachsen, den Graphen der Funktion f und die Gerade $x = a$ begrenzt ist?

5 Vektoren

Um Punkte in einem mehrdimensionalen Raum zu beschreiben werden in der Regel Vektoren verwendet. Dabei entspricht jeder Eintrag einer Koordinate im entsprechenden dimensionalen Raum. Dies kann verwendet werden um zum Beispiel die Position einer Punktmasse im Raum zu beschreiben oder eine Kraft, welche an einem Körper angreift. Da dies beides sehr oft in der Mechanik vorkommt, ist ein guter Umgang mit Vektoren unumgänglich.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf die in kartesischen Koordinaten gegebenen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.1 Grundlegende Rechenoperationen

1. Führen Sie die folgenden Berechnungen aus:
   (a) $\vec{a} + \vec{b}$
   (b) $\vec{b} - \vec{c}$
   (c) $\vec{a} \cdot \vec{b}$
   (d) $\vec{c} \times \vec{b}$
   (e) $\vec{b} \times \vec{c}$
   (f) $\vec{a} \times \vec{b}$
   (g) $\vec{c} \times \vec{c}$
   (h) $|\vec{a}|$

5.2 Eigenschaften von Vektorprodukten

2. Im Folgenden sind zunächst Vektoren gegeben, die eine bestimmte Eigenschaft besitzen. Vereinfachen Sie die danach folgenden Ausdrücke mit Hilfe der gegebenen Eigenschaft.
   (a) Gegeben: $\vec{v} \perp \vec{u}$. Bestimmen Sie: $\vec{v} \cdot \vec{u}$.
   (b) Gegeben: $\vec{v} = \vec{0}$. Bestimmen Sie: $\vec{v} \cdot \vec{u}$.
   (c) Gegeben: $|\vec{v}| = v$, $|\vec{u}| = u$, der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{u}$ ist α. Bestimmen Sie $\vec{v} \cdot \vec{u}$
   (d) Gegeben: $\vec{v} \parallel \vec{u}$. Bestimmen Sie: $\vec{v} \times \vec{u}$
   (e) Gegeben: $\vec{v} = \vec{0}$. Bestimmen Sie: $\vec{v} \times \vec{u}$.
   (f) Gegeben: $|\vec{v}| = v$, $|\vec{u}| = u$, der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{u}$ ist α. Des Weiteren ist der Vektor $\vec{n}$ gegeben mit $\vec{n} \perp \vec{v}$, $\vec{n} \perp \vec{u}$ und $|\vec{n}| = 1$. Bestimmen Sie $\vec{v} \times \vec{u}$

3. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$, welcher der Gleichung $3\vec{a} - 2\vec{x} = \vec{b}$ genügt.

4. Skizzieren Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

5. Bestimmen Sie den Winkel, welcher von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen wird.