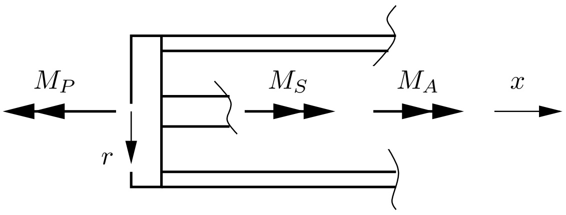
9. Tutorium

Aufgabe 97

Freischnitt und Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_P = M_S + M_A \tag{1}$$

M_P ... an der Platte angreifendes äußeres Moment
M_S ... Schnittmoment in der Stahlwelle
M_A ... Schnittmoment in der Alu-Hohlwelle

Geometrie: Durch die Verbindung mit der starren Platte müssen der Verdrehwinkel der Stahlwelle ϑ_S und der Verdrehwinkel der Aluwelle ϑ_A gleich sein (ϑ_p = Verdrehwinkel der Platte gegen die Einspannung):

$$\vartheta_A = \vartheta_S = \vartheta_p \tag{2}$$

Materialgesetz:

$$M = GI_t \frac{d\vartheta}{dx} \tag{3}$$

mit $I_t = I_p$ bei Kreisquerschnitten und $I_p = \int r^2 dA$, hier also für die Vollwelle:

$$I_{t,S} = \int_0^{\frac{d}{2}} r^2\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi}{32} d^4 \tag{4}$$

und für die Hohlwelle

$$I_{t,A} = \int_{\frac{d_i}{2}}^{\frac{d_a}{2}} r^2\, 2\pi r dr = \frac{\pi}{32}\left(d_a^4 - d_i^4\right) \tag{5}$$

Integration von (3) über die gesammte Länge l (für den Fall, dass M, G und I_t über l konstant sind, also homogene Torsion vorliegt):

$$Ml = GI_t\vartheta \tag{6}$$

(2) und (6) eingesetzt in (1) ergibt:

$$M_p = \left(G_S I_{t,S} + G_A I_{t,A}\right)\frac{\vartheta_p}{l} \tag{7}$$

Schubwinkel/Drillung: $\gamma = r\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$,
HOOKEsches Gesetz: $\tau = G\,\gamma$

$$\tau(r) = G\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\,r \tag{8}$$

Offenbar tritt die größte Spannung jeweils am Außenrand der Welle auf. Mit $\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{\vartheta_p}{l}$ (homogene Torsion) ergibt sich:

$$\tau_{\max} = G\,\frac{\vartheta_p}{l}\,r_{\text{außen}} \Leftrightarrow \frac{\vartheta_p}{l} = \frac{\tau_{\max}}{G\,r_{\text{außen}}} \tag{9}$$

Das Moment, bei dem am Außenrand der Stahlwelle die zulässige Schubspanung für Stahl τ_S herrscht, ergibt sich aus (9) mit (7):

$$M_{p,S} = \left(G_S\,I_{t,S} + G_A\,I_{t,A}\right)\frac{\tau_S}{G_S\frac{d}{2}} \tag{10}$$

Das Moment, bei dem am Außenrand der Aluwelle die zulässige Schubspanung für Aluminium τ_A herrscht, lautet analog:

$$M_{p,A} = \left(G_S\,I_{t,S} + G_A\,I_{t,A}\right)\frac{\tau_A}{G_A\frac{d_a}{2}} \tag{11}$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich:

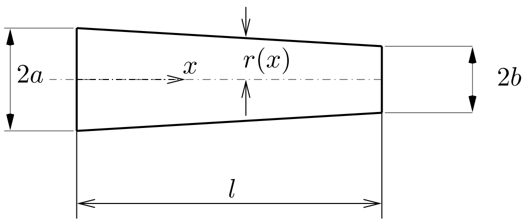
$$I_{t,S} = 6{,}14\cdot 10^{-7}\mathrm{m}^4 \tag{12}$$
$$I_{t,A} = 2{,}00\cdot 10^{-6}\mathrm{m}^4 \tag{13}$$
$$M_{p,S} = 6190\ \mathrm{N\ m} \tag{14}$$
$$M_{p,A} = 7039\ \mathrm{N\ m} \tag{15}$$

Bei einem Drehmoment größer als 6190 N m wird die zulässige Spannung in der Stahlwelle überschritten. Das maximal zulässige Drehmoment beträgt also:

$$\underline{M_{\text{zul}} = 6190\,\mathrm{N\ m}} \tag{16}$$

Aufgabe 98

(a)



Geradengleichung für den Radius des Kegels:

$$r(x) = \frac{b-a}{l}x + a$$
$$:= \alpha x + \beta$$

Polares Trägheitsmoment für die Kreisfläche:

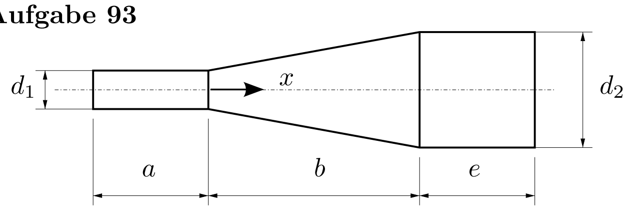
$$I_p(x) = \frac{\pi}{2}r(x)^4$$
$$= \frac{\pi}{2}(\alpha x + \beta)^4$$

(b) Annahmen $M_t = const.$, $G = const.$, Torsions-Dgl. (gilt eigentlich nur für zylindrische Abschnitte, d.h. der Kegel muss stumpf sein! Siehe Szabo)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_T}{GI_p}$$
$$\varphi = \int_0^l \frac{M_T}{G\frac{\pi}{2}(\alpha x+\beta)^4}dx$$
$$= \frac{2M_T}{G\pi}\int_0^l \frac{1}{(\alpha x+\beta)^4}dx$$
$$= \frac{2M_T}{G\pi}\int_a^b \frac{1}{z^4}\frac{1}{\alpha}dz$$
$$= \frac{2M_T}{G\pi}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{z^3}\frac{1}{\alpha}\right]_a^b$$
$$= \frac{2M_T l}{3G\pi(b-a)}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)$$

Hausaufgaben

Aufgabe 93



Bei der Bestimmung der Federkonstante einer Drehfeder wird die Annahme getroffen, dass es einen linearen Zusammenhang zwischen Torsionsmoment M und sich einstellender Verdrehung $\hat{\vartheta}$ gibt:

$$M = c\hat{\vartheta}. \tag{17}$$

In der gesamten Welle gilt, dass die Schnittmomente konstant und gleich groß sind. Mit der Gleichung

$$M = GI_p\vartheta' \tag{18}$$

folgt dann für die Differenz der Verdrehung $\hat{\vartheta}_i$ in den Bereichen mit konstantem Durchmesser:

$$\hat{\vartheta}_1 = \frac{Ma}{GI_{p1}} = \frac{32Ma}{G\pi d_1^4} \tag{19}$$

$$\hat{\vartheta}_3 = \frac{Me}{GI_{p3}} = \frac{32Me}{G\pi d_2^4}. \tag{20}$$

In dem mittlerem Bereich ändert sich der Durchmesser und das polare Flächenträgheitsmoment

$$d(x) = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b}x \tag{21}$$

$$I_p(x) = \frac{\pi}{32}\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b}x\right)^4. \tag{22}$$

Damit lautet Gleichung (18)

$$\vartheta_2'(x) = \frac{M}{G}\frac{32}{\pi}\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b}x\right)^{-4}, \tag{23}$$

welche einmal integriert liefert:

$$\vartheta_2(x) = -\frac{M}{G}\frac{32}{3\pi}\frac{b}{d_2 - d_1}\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b}x\right)^{-3} + c. \tag{24}$$

Die Verdrehung $\hat{\vartheta}_2$ in diesem Abschnitt folgt dann zu:

$$\hat{\vartheta}_2 = \vartheta(b) - \vartheta(0) = \frac{M}{G}\frac{32}{3\pi}\frac{b}{d_2 - d_1}\left(\frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3}\right). \tag{25}$$

Die Verdrehung der zusammengesetzten Welle $\hat{\vartheta}$ ist die Summe der Einzelverdrehungen:

$$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}_1 + \hat{\vartheta}_2 + \hat{\vartheta}_3 \tag{26}$$

$$= M\underbrace{\frac{32}{\pi G}\left[\frac{a}{d_1^4} + \frac{1}{3}\frac{b}{d_2 - d_1}\left(\frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3}\right) + \frac{e}{d_2^4}\right]}_{c^{-1}}. \tag{27}$$

Aufgabe 94

(a) Schubverformung bei Kreisquerschnitten:

$$\gamma = r\frac{d\theta}{dx} \tag{28}$$

mit x-Achse als Wellenachse und $\theta(x)$ als Verdrehwinkel der Welle an der Stelle x. γ ist der Gleit- oder Schubwinkel.

Das HOOKEsche Gesetz verknüpft Torsionsspannungen τ und Gleitungen γ

$$\tau = G\gamma \tag{29}$$

Daraus folgt

$$\tau(r) = G\frac{d\theta}{dx}r \tag{30}$$

Das resultierende Moment der Schubspannungen in der tordierten Welle ist

$$M = \int_A r\tau dA \left(= \int_{r_i}^{r_a} r\tau(r)2\pi r dr\right) \tag{31}$$

Mit (30) folgt das Moment, das durch die Verwindung $\frac{d\theta}{dx}$ hervorgerufen wird:

$$M = G\left(\int_A r^2 dA\right)\frac{d\theta}{dx} = GI_p\frac{d\theta}{dx} \tag{32}$$

Der darin enthaltene Ausdruck

$$I_p = \int r^2 dA = 2\pi\int_{r_i}^{r_a} r^3 dr = \frac{\pi}{2}\left(r_a^4 - r_i^4\right) \tag{33}$$

wird als polares Flächenträgheitsmoment bezeichnet.

Die maximale Spannung in der Welle tritt am Außenrand bei $r = r_a$ auf, wie man aus Gl.(30) sofort sieht. Die maximal zulässige Verwindung $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{max}$ ist dann erreicht, wenn am Außenrand die maximal zulässige Spannung τ_{zul} erreicht wird. Aus (30) ergibt sich:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{max} = \frac{\tau_{zul}}{G\,r_a} \tag{34}$$

Das Moment, das die Welle dabei überträgt, ergibt sich aus (32) mit (33):

$$M_{max} = \frac{\pi}{2}\frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a}\tau_{zul}. \tag{35}$$

$$M_{max,1} = 45{,}20\text{ kN m} \tag{36}$$

(b) Eine Vollwelle gleicher Masse hat die gleiche Querschnittsfläche πr_{a2}^2 wie die Welle aus Teil (a): $\pi\left(r_{a1}^2 - r_{i1}^2\right)$.

$$\Rightarrow r_{a2} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{i1}^2} = 55{,}9\text{ mm} \tag{37}$$

$$\Rightarrow M_{max,2} = 23{,}32\text{ kN m} \tag{38}$$

$\Rightarrow$ Die Hohlwelle gleicher Querschnittsfläche läßt ein fast doppelt so großes Torsionsmoment im Vergleich zur Vollwelle zu!

(c) Hier gilt analog zu Teil (b):

$$\pi\left(r_{a3}^2 - r_{i3}^2\right) = \pi\left(r_{a1}^2 - r_{i1}^2\right) \tag{39}$$

$$r_{i3} = \sqrt{r_{a3}^2 - r_{a1}^2 + r_{i1}^2} = 82{,}92\,\text{mm} \tag{40}$$

$$M_{max,3} = 70{,}41\text{ kN m} \tag{41}$$

$\Rightarrow$ Eine Vergrößerung der Radien bei gleicher Querschnittsfläche führt zu einem noch höheren zulässigen Torsionsmoment. Grund dafür ist der Anstieg des polaren Flächenträgheitsmomentes.
