7. Tutorium

Aufgabe 68

(a) Die Schnittlastendifferentialgleichungen lauten

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q\left(x\right) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} = -q\left(x\right) \quad . \tag{1}$$

(b) Für Träger wird in zwei Bereiche geteilt: Bereich 1 mit $0 < x < 3l$ ($x_1 \in [0, 3l]$) und Bereich 2 mit $3l < x < 5l$ ($x_2 \in [0, 2l]$). Die Teilung bei $x = 3l$ ist nötig, da dort die Streckenlast einen Sprung hat. Für die Streckenlast gilt

$$q\left(x_1\right) = \frac{q_0}{3l} x_1$$
$$q\left(x_2\right) = -q_0 \quad .$$

(c) Die Rand- und Übergangsbedingungen lauten

$$M\left(x_2 = 2l\right) = 0 \tag{2}$$
$$Q\left(x_2 = 2l\right) = 0 \tag{3}$$
$$M\left(x_2 = 0\right) = M\left(x_1 = 3l\right) \tag{4}$$
$$Q\left(x_2 = 0\right) = Q\left(x_1 = 3l\right) \tag{5}$$

Die Querkraft weist bei $x = 3l$ einen Knick auf, da dort die Streckenlast von q_0 auf $-q_0$ springt.

(d) Durch Integration von (1) im Abschnitt BC (Bereich 2) erhält man

$$Q\left(x_2\right) = q_0 x_2 + C_1$$
$$M\left(x_2\right) = \frac{1}{2} q_0 x_2^2 + C_1 x_2 + C_2 \quad .$$

Einsetzen der Randbedingungen (2) und (3) führt auf die Gleichungen

$$0 = 2q_0 l + C_1$$
$$0 = \frac{4}{2} q_0 l^2 + 2C_1 l + C_2$$

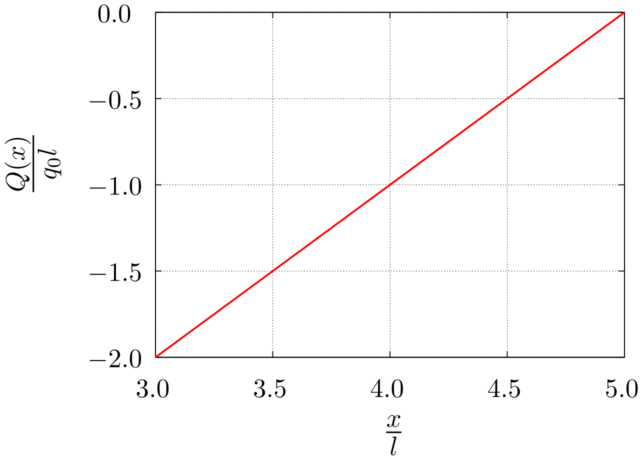
und schließlich auf die Konstanten

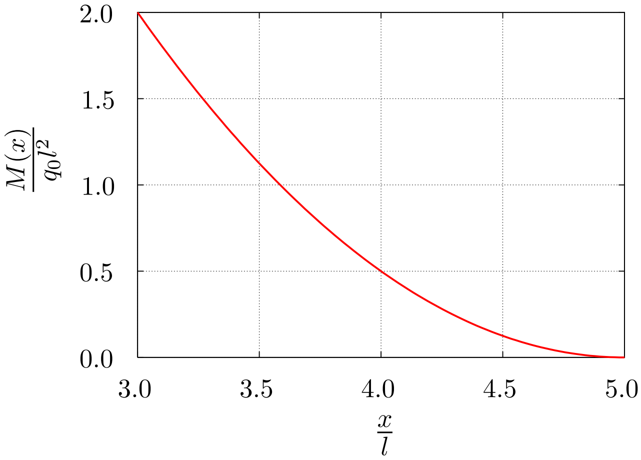
$$C_1 = -2q_0 l \quad , \quad C_2 = +2q_0 l^2 \quad .$$

Einsetzen ergibt

$$Q\left(x_2\right) = q_0 l \left(\frac{x_2}{l} - 2\right)$$
$$M\left(x_2\right) = q_0 l^2 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{l}\right)^2 - 2\frac{x_2}{l} + 2\right) \quad .$$

(e) Die Diagramme zeigen die entsprechenden Kurven.



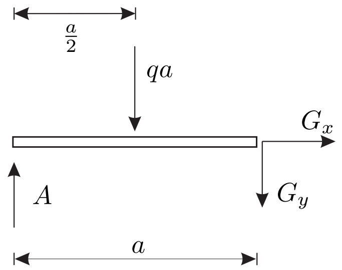


Hausaufgaben

Aufgabe 67

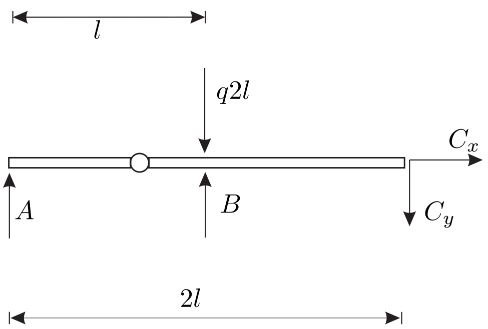
Zur Lösung der Aufgabe muss der Verlauf des Biegemomentes bestimmt werden.

Bestimmung der Auflagekräfte:
am Teilsystem



$$\sum M^{(G)} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} qa \tag{6}$$

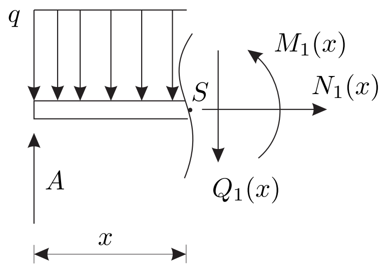
am Gesamtsystem:



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = 0 \tag{7}$$
$$\sum M^{(B)} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = A = \frac{1}{2} qa \tag{8}$$
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B = q\,(2l - a) \tag{9}$$

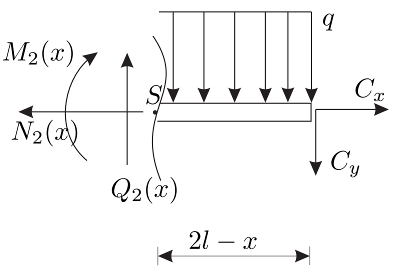
Biegemomentenverlauf

Abschnitt 1: $0 < x < l$



$$\sum M^{(S)} = M_1(x) - Ax + \frac{1}{2} qx^2 = 0 \tag{10}$$
$$\Rightarrow \quad M_1(x) = Ax - \frac{1}{2} qx^2$$
$$M_1(x) = \frac{1}{2} ql^2 \left[\frac{ax}{l^2} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \tag{11}$$

Abschnitt 2: $l < x < 2l$



$$\sum M^{(S)} = -M_2(x) + C_y(2l - x) - \frac{1}{2} q(2l - x)^2 = 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad M_2(x) = \frac{1}{2} qa(2l - x) - \frac{1}{2} q(2l - x)^2$$
$$M_2(x) = \frac{1}{2} ql^2 \left[\frac{2a}{l} + \left(4 - \frac{a}{l} \right) \frac{x}{l} - 4 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \tag{13}$$

Maximales Biegemoment

Die Länge a kann nun so bestimmt werden, dass das maximale Biegemoment möglichst klein ist. Die notwendige Bedingung für ein lokales Maximum lautet:

$$\frac{dM}{dx} \stackrel{!}{=} 0 \tag{14}$$

Im Bereich $0 \leq x < l$:

$$0 = q \left(\frac{a}{2} - x_1 \right) \tag{15}$$
$$\Rightarrow \; x_1 = \frac{a}{2} \; \Rightarrow \; M(x_1) = \frac{qa^2}{8} \tag{16}$$

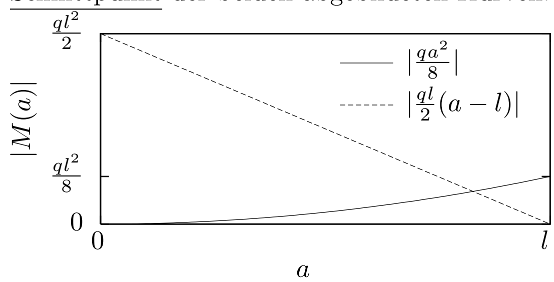
Im Bereich $l < x \leq 2l$:

$$0 = q \left(2l - \frac{a}{2} - x_2 \right) \tag{17}$$
$$\Rightarrow \; x_2 = 2l - \frac{a}{2} \; \Rightarrow \; M(x_2) = \frac{qa^2}{8} \tag{18}$$

Neben lokalen Maxima im Inneren der Gebiete können auch Maxima an den Gebietsrändern bei $x = 0$, $x = l$ oder $x = 2l$ auftreten. Bei $x = 0$ sowie bei $x = 2l$ ist wegen der Gelenke das Moment Null (also sicher nicht maximal). Das Moment bei $x = l$ ist

$$M(x_3 = l) = \frac{ql}{2}(a - l) \tag{19}$$

Das maximale Biegemoment folgt je nach Wert für a entweder aus Gleichung (16) bzw. (18) oder (19). Aus der folgenden Skizze wird ersichtlich, daß das größere Biegemoment minimal ist für dasjenige a, bei dem $|\frac{qa^2}{8}|$ aus (18) und $|\frac{ql}{2}(a-l)|$ aus (19) gleich werden; gesucht ist demnach der Schnittpunkt der beiden abgebildeten Kurven.



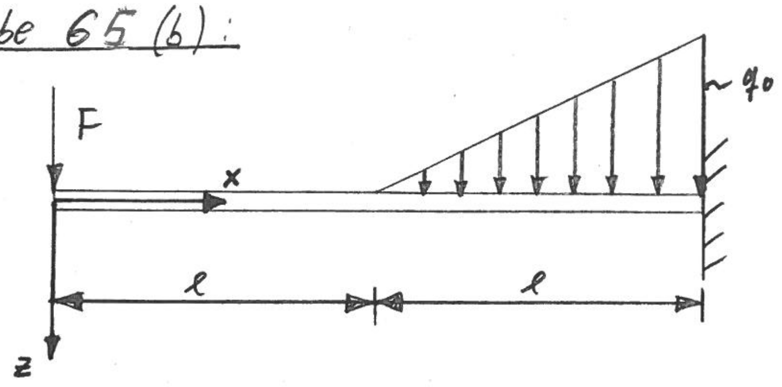
Also gilt:

$$M_{\text{opt}} = \frac{qa_{\text{opt}}^2}{8} = \frac{ql}{2}(l - a_{\text{opt}}) \tag{20}$$
$$a_{\text{opt}}^2 + 4la_{\text{opt}} - 4l^2 = 0 \tag{21}$$
$$a_{\text{opt},1/2} = 2l(-1 \pm \sqrt{2}) \tag{22}$$

Wegen $a \stackrel{!}{\geq} 0$ ergibt sich als optimales Maß a (mit dem kleinsten maximalen Biegemoment):

$$\boxed{a_{\text{opt}} = 2(\sqrt{2} - 1)\; l} \approx 0{,}8284\; l\,. \tag{23}$$

Aufgabe 65 (b):



Bestimmung des Querkraft- und Momentenverlaufs mittels Schnittlastendgl.. Dazu erforderlich ist die Kenntnis der Streckenlast $q(x)$, welche wir aus Aufgabenteil (a) kennen:

$$q(x) = -q_0 + \frac{q_0}{l}x$$

I. Bereich: $0 \leq x \leq l$

$$Q_I'(x) = -q_I(x) = 0$$

$$\Rightarrow Q_I(x) = C_1 \qquad (1)$$

$$M_I(x) = C_1 x + C_2 \qquad (2)$$, denn $M_I'(x) = Q_I(x)$

II. Bereich: $l < x \leq 2l$

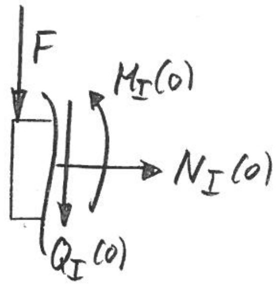
$$Q_{II}'(x) = -q_{II}(x) = q_0 - \frac{q_0}{l}x$$

$$\Rightarrow Q_{II}(x) = q_0 x - \frac{q_0}{2l}x^2 + C_3 \qquad (3)$$

$$M_{II}(x) = \frac{q_0}{2}x^2 - \frac{q_0}{6l}x^3 + C_3 x + C_4 \qquad (4)$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3 und C_4 erfolgt mittels Auswertung von Rand- und Übergangsbedingungen (physikalische ~): Wer diese nicht erkennt, sei daran erinnert, dass das System nur dann im Gleichgewicht ist, wenn auch jedes "herausgeschnittene" Teil im Gleichgewicht ist. Schneiden wir mal die Randstelle $x=0$ frei (Das Element hat keine Ausdehnung; auch keine infinitesimale!) und setzen anschließend die GGB an:

Stelle $x=0$:



GGB:

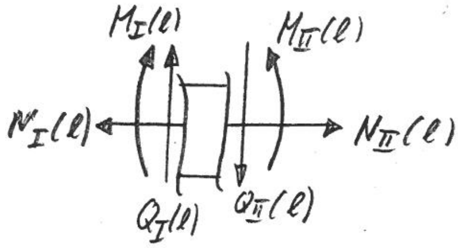
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow F + Q_I(0) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{Q_I(0) = -F} \quad (B1)$$

$$\Sigma M^{(S)} = 0 \Rightarrow \underline{M_I(0) = 0} \quad (B2)$$

Gleiches tun wir an der Übergangsstelle $x=l$!

Stelle $x=l$:



GGB:

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow \underline{-Q_I(l) + Q_{II}(l) = 0} \quad (B3)$$

$$\Sigma M^{(S)} = 0 \Rightarrow \underline{-M_I(l) + M_{II}(l) = 0} \quad (B4)$$

Anmerkung: Man könnte auch die Randstelle $x = 2l$ freischneiden. Hierbei werden jedoch auch die Lagerreaktionen der Einspannung sichtbar und gehen in die GGB ein. Kennt man diese Lagerreaktion (durch Auswertung der GGB am Gesamtsystem) so kann man jene alternativ zur Bestimmung der Konstanten nutzen. Der Vorteil der Schnittlastendgl. gegenüber dem Globalschnittverfahren liegt aber gerade darin, dass man nicht vorab die Lagerreaktionen zu bestimmen braucht!

aus (B1) $\Rightarrow \underline{C_1 = -F}$

aus (B2) $\Rightarrow \underline{C_2 = 0}$

aus (B3) $\Rightarrow -(-F) + q_0 \cdot l - \frac{q_0}{2l} l^2 + C_3 = 0$

$$\underline{C_3 = -F - q_0 \frac{l}{2}}$$

aus (B4) $\Rightarrow -(-F \cdot l) + \frac{q_0}{2} l^2 - \frac{q_0}{6l} l^3 + \left(-F - q_0 \frac{l}{2}\right) \cdot l + C_4 = 0$

$$\Rightarrow \underline{C_4 = + \frac{q_0}{6} l^2}$$

Einsetzen der Konstanten ergibt:

$Q_I(x) = -F$ $\qquad$ $Q_{II}(x) = q_0 x - \frac{q_0}{2l}x^2 - F - q_0\frac{l}{2}$

$M_I(x) = -F \cdot x$ $\qquad$ $M_{II}(x) = \frac{q_0}{2}x^2 - \frac{q_0}{6l}x^3 - Fx - q_0\frac{l}{2}\cdot x - \frac{q_0}{6}l^2$

Mit der Vorgabe $F := q_0 l$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} Q_I(x) = -q_0 l & Q_{II}(x) = -\frac{q_0}{2l}x^2 + q_0 x - \frac{3}{2}q_0 l \\ M_I(x) = -q_0 l \cdot x & M_{II}(x) = -\frac{q_0}{6l}x^3 + \frac{q_0}{2}x^2 - \frac{3}{2}q_0 l \cdot x + \frac{q_0}{6}l^2 \end{array}}$$

Die graphische Darstellung entnehme man Aufgabenteil (a)!