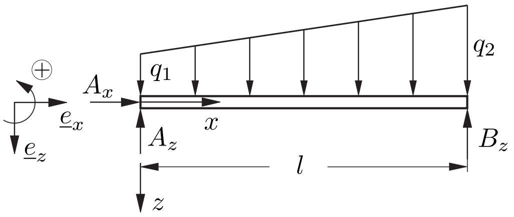
6. Tutorium

Aufgabe 61

Freimachskizze:

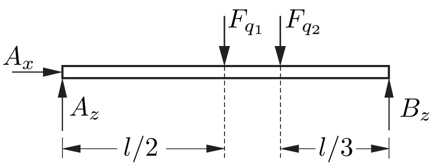
$$q(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\, x + q_1 \tag{1}$$



Ersatzsystem: mit

$$F_{q_1} = q_1 \cdot l \tag{2}$$

$$F_{q_2} = \frac{(q_2 - q_1)\cdot l}{2} \tag{3}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{A_x = 0} \tag{4}$$

$$\sum M^{(A)} = 0 \Rightarrow -F_{q_1}\cdot\frac{l}{2} - F_{q_2}\cdot\frac{2}{3}\,l + B_z\cdot l = 0 \tag{5}$$

$$B_z = \frac{F_{q_1}}{2} + \frac{2}{3}F_{q_2} = \frac{1}{2}\,q_1\cdot l + \frac{1}{3}(q_2 - q_1)\cdot l \tag{6}$$

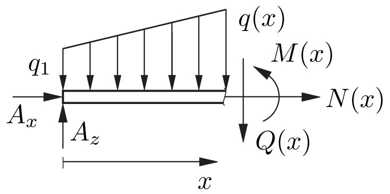
$$= \underline{\frac{1}{6}(q_1 + 2q_2)\cdot l} \tag{7}$$

$$\sum M^{(B)} = 0 \Rightarrow F_{q_1}\cdot\frac{l}{2} + F_{q_2}\cdot\frac{l}{3} - A_z\cdot l = 0 \tag{8}$$

$$A_z = \frac{F_{q_1}}{2} + \frac{F_{q_2}}{3} = \underline{\frac{1}{6}\,(2q_1 + q_2)\cdot l} \tag{9}$$

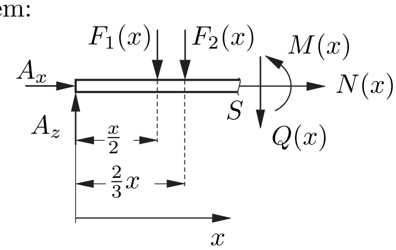
Schnittlasten:

Freischnitt:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N(x) = -A_x = 0 \tag{10}$$

Ersatzsystem:



$$F_1(x) = q_1 \cdot x \tag{11}$$

$$F_2(x) = \frac{q(x) - q_1}{2}\,x = \frac{q_2 - q_1}{2l}\,x^2 \tag{12}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -A_z + F_1(x) + F_2(x) + Q(x) = 0 \tag{13}$$

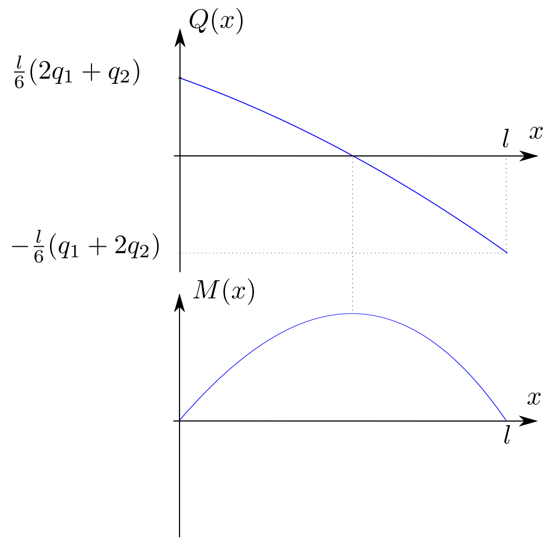
$$Q(x) = A_z - F_1(x) - F_2(x) \tag{14}$$

$$= -\frac{q_2 - q_1}{2l}\,x^2 - q_1 x + \frac{1}{6}(2q_1 + q_2)\,l \tag{15}$$

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow \tag{16}$$

$$M(x) + F_2(x)\,\frac{x}{3} + F_1(x)\,\frac{x}{2} - A_z\cdot x = 0 \tag{17}$$

$$M(x) = \frac{1}{6}(2q_1 + q_2)\,l\cdot x - \frac{q_2 - q_1}{6l}\,x^3 - q_1\,\frac{x^2}{2} \tag{18}$$



Aufgabe 74

(a) Das Tragwerk ist statisch bestimmt gelagert.

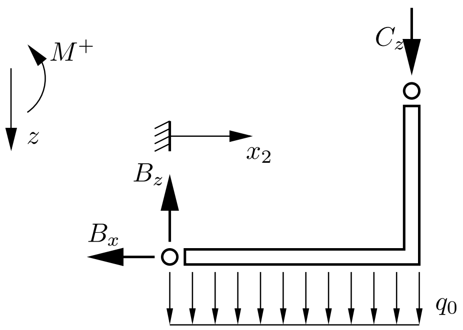
Die notwendige Bedingung für ein System starrer Körper in der Ebene

$$3n = r + v \tag{19}$$

ist erfüllt: Die Anzahl der starren Körper n ist gleich 2. Die feste Einspannung links stellt ein dreiwertiges Lager dar, das Loslager oben ist einwertig ($r = 4$). Das Gelenk in der Mitte ist zweiwertig ($v = 2$).

Hinreichend für die statische Bestimmtheit ist, dass Einbaufehler nicht zu Verspannungen führen und dass kein Teil in irgendeiner Form beweglich ist.

(b) Freischnitt des rechten Teilkörpers:



Die Linienlast q_0 kann ersetzt werden durch eine Einzelkraft $F_{q,\mathrm{res}} = q_0 a$, die in der Mitte ($x_2 = \frac{a}{2}$) angreift.

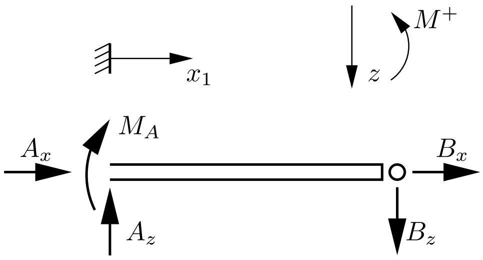
$$\sum F_x = 0 = -B_x \qquad \Rightarrow B_x = 0 \tag{20}$$

$$\sum F_z = 0 = B_z - q_0 a - C_z \qquad \Rightarrow B_z = C_z + q_0 a \tag{21}$$

$$\sum M^{(B)} = 0 = -aC_z - \frac{a}{2} q_0 a \qquad \Rightarrow C_z = -\frac{1}{2} q_0 a \tag{22}$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{1}{2} q_0 a \tag{23}$$

Freischnitt des linken Teilkörpers:



$$\sum F_x = 0 = A_x + B_x \qquad \Rightarrow A_x = 0 \tag{24}$$

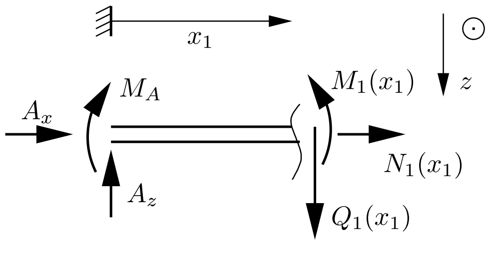
$$\sum F_z = 0 = -A_z + B_z \qquad \Rightarrow A_z = B_z = \frac{1}{2} q_0 a \tag{25}$$

$$\sum M^{(A)} = 0 = -M_A - aB_z \qquad \Rightarrow M_A = -\frac{1}{2} q_0 a^2 \tag{26}$$

<u>Hinweis:</u> $M^{(A)}$ bezeichnet Momente (z.B. der verschiedenen auf den Balken wirkenden Kräfte) mit dem Bezugspunkt A. M_A bezeichnet dagegen das Moment, das von der Einspannung im Punkt A auf den Balken wirkt.

(c) <u>Schnittlasten zwischen A und B:</u>
Ortskoordinate $x_1 \in (0, a)$

Freischnitt durch den Balken an der (im folgenden festgehaltenen) Koordinate x_1:



$$\sum F_x = 0 = A_x + N_1(x_1) \qquad \Rightarrow N_1(x_1) = 0 \tag{27}$$

$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q_1(x_1) \qquad \Rightarrow Q_1(x_1) = \frac{1}{2} q_0 a \tag{28}$$

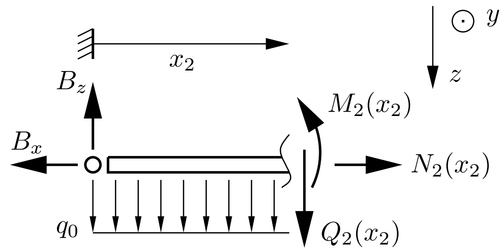
$$\sum M^{(S_1)} = 0 = M_1(x_1) - M_A - x_1 A_z \tag{29}$$

$$\Rightarrow M_1(x_1) = \frac{1}{2} q_0 a^2 \left(\frac{x_1}{a} - 1\right) \tag{30}$$

<u>Hinweis:</u> $M^{(S_1)}$ steht für Momente um den Schnittpunkt S_1 (Ortskoordinate x_1).

<u>Schnittlasten zwischen B und dem Winkel zw. B u. C:</u>
Ortskoordinate $x_2 \in (0, a)$

Freischnitt durch den Balken an der (im folgenden festgehaltenen) Koordinate x_2:



$$\sum F_x = 0 = -B_x + N_2(x_2) \qquad \Rightarrow N_2(x_2) = 0 \tag{31}$$

$$\sum F_z = 0 = -B_z + Q_2(x_2) + q_0 x_2 \tag{32}$$

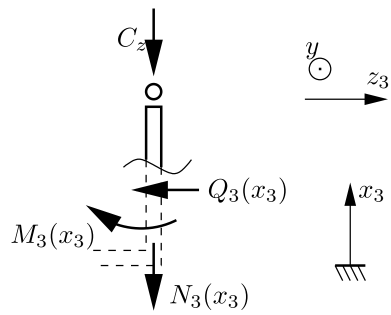
$$\Rightarrow Q_2(x_2) = q_0 \left(\frac{a}{2} - x_2\right) \tag{33}$$

$$\sum M^{(S_2)} = 0 = M_2(x_2) + \frac{x_2}{2} q_0 x_2 - x_2 B_z \tag{34}$$

$$\Rightarrow M_2(x_2) = \frac{1}{2} q_0 a^2 \left(\frac{x_2}{a} - \left(\frac{x_2}{a}\right)^2\right) \tag{35}$$

<u>Schnittlasten zwischen C und dem Winkel zw. B u. C:</u>
Ortskoordinate $x_3 \in (0, a)$

Freischnitt durch den Balken an der (im folgenden festgehaltenen) Koordinate x_3:

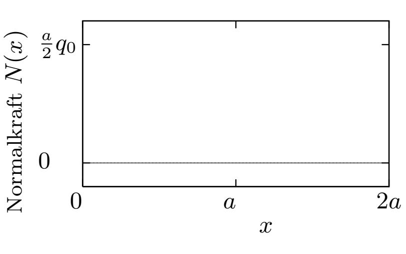


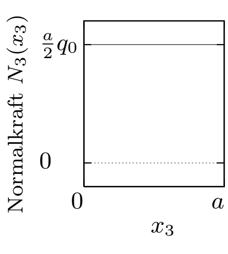
$$\sum F_x = 0 = -C_z - N_3(x_3) \qquad \Rightarrow N_3(x_3) = \frac{1}{2} q_0 a \tag{36}$$

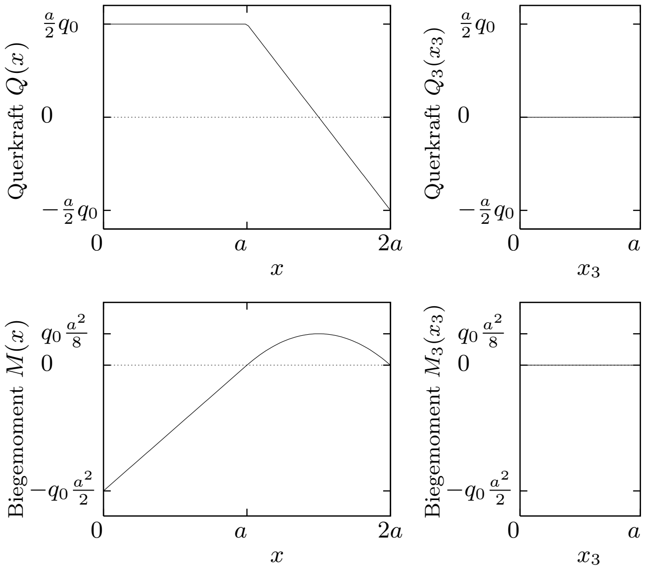
$$\sum F_z = 0 = -Q_3(x_3) \qquad \Rightarrow Q_3(x_3) = 0 \tag{37}$$

$$\sum M^{(S_3)} = 0 = M_3(x_3) \qquad \Rightarrow M_3(x_3) = 0 \tag{38}$$

<u>Grafische Darstellung:</u>
In den linken Diagrammen werden jeweils die ersten beiden Bereiche mit einer x-Koordinate zusammengefaßt: $x_1 = x$, $x_2 = x - a$.





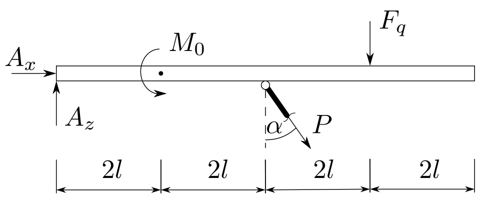


Hausaufgaben

Aufgabe 63

(a) Das System ist statisch bestimmt. 1 Körper = 3 Freiheitsgrade in der Ebene, 1 Festlager + 1 Pendelstütze = 3 unbekannte Lagerreaktionen, das System kann nicht verspannt werden und ist nicht wackelig.

(b) Auflagerreaktionen
Zunächst wird der Balken freigeschnitten und die Streckenlast durch ihre Resultierende ersetzt.



GGB:

$$\sum M^{(A)} = M_0 - P\cos\alpha \cdot 4l - F_q \cdot 6l = 0 \qquad (39)$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{4l\cos\alpha}\left(M_0 - 4q_0 l \cdot 6l\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{\cos\alpha}5q_0 l}}$$

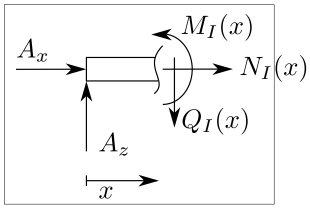
$$\sum F_x = A_x + P\sin\alpha = 0 \qquad (40)$$

$$\Rightarrow A_x = -P\sin\alpha = \underline{\underline{5q_0 l\tan\alpha}}$$

$$\sum F_z = -A_z + P\cos\alpha + F_q = 0 \qquad (41)$$

$$\Rightarrow A_z = -5q_0 l + 4q_0 l = \underline{\underline{-q_0 l}}$$

(c) Schnittlasten
I. Bereich: $0 \leq x < 2l$



GGB:

$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow N_I(x) = -A_x = \underline{\underline{-5q_0 l\tan\alpha}} \qquad (42)$$

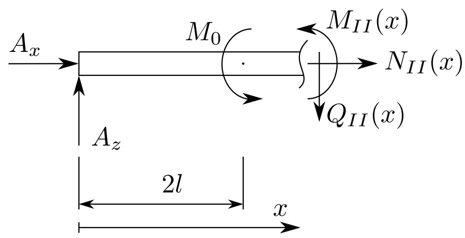
$$\sum F_z = 0$$

$$\Rightarrow Q_I(x) = A_z = \underline{\underline{-q_0 l}} \qquad (43)$$

$$\sum M^{(S)} = 0$$

$$\Rightarrow M_I(x) = A_z \cdot x = \underline{\underline{-q_0 l x}} \qquad (44)$$

II. Bereich: $2l \leq x < 4l$



GGB:

$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow N_{II}(x) = -A_x = \underline{\underline{-5q_0 l\tan\alpha}} \qquad (45)$$

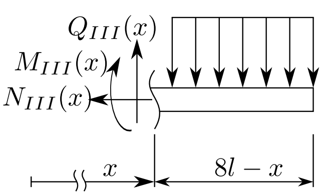
$$\sum F_z = 0$$

$$\Rightarrow Q_{II}(x) = A_z = \underline{\underline{-q_0 l}} \qquad (46)$$

$$\sum M^{(S)} = M_{II}(x) - A_z \cdot x + M_0 = 0$$

$$\Rightarrow M_{II}(x) = A_z \cdot x - M_0 = \underline{\underline{-q_0 l x - 4q_0 l^2}} \qquad (47)$$

III. Bereich: $4l \leq x \leq 8l$



GGB:

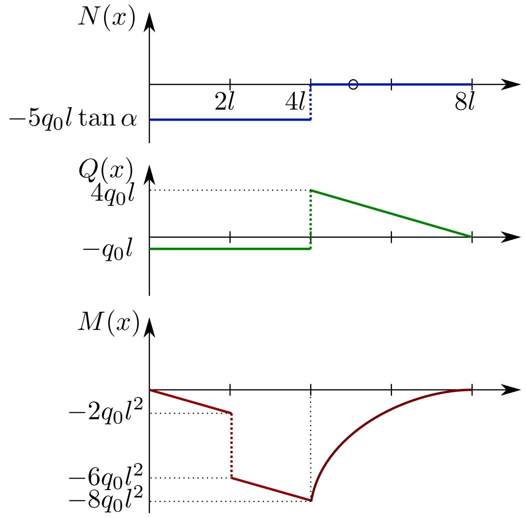
$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow N_{III}(x) = \underline{0} \qquad (48)$$

$$\sum F_z = 0$$
$$\Rightarrow Q_{III}(x) = \underline{\underline{q_0\,(8l - x)}} \tag{49}$$

$$\sum M^{(S)} = M_{III}(x) - q_0\,(8l - x) \cdot \frac{1}{2}\,(8l - x) = 0$$
$$\Rightarrow M_{III}(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}q_0\,(8l - x)^2}} \tag{50}$$

Graphische Veranschaulichung der Schnittlasten



Auf die Vorzeicheneinträge in den Flächen darf hier verzichtet werden, da die positiven Zählrichtungen der Achsen angegeben sind.

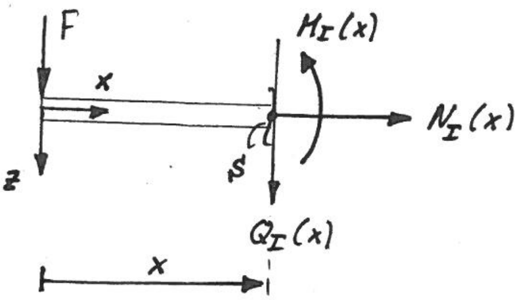
Heß, WS 08/09

Aufgabe 65 (a) : (Ha)

Schnittlastenermittlung mit Elementare Freischnittmethode

Die Berechnung der Auflagerreaktionen können wir in diesem Fall einsparen, wenn wir (zweimal) gezielt das positive Schnittufer betrachten

I. Bereich : $0 \leq x \leq l$



GGB:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{N_I(x) = 0}}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow Q_I(x) + F = 0$$

$$\underline{\underline{Q_I(x) = -F}}$$

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow M_I(x) + F \cdot x = 0$$

$$\underline{\underline{M_I(x) = -F \cdot x}}$$

II. Bereich : $l < x \leq 2l$

Hierfür müssen wir nun zunächst die Funktion der Streckenlast ermitteln, wobei wir das globale Koordinatensystem zugrunde legen wollen (auch üblich ist die Einführung eines neue Koordinatensystems für jedes "Feld"):

Ansatz: $q(x) = C_1 x + C_2$

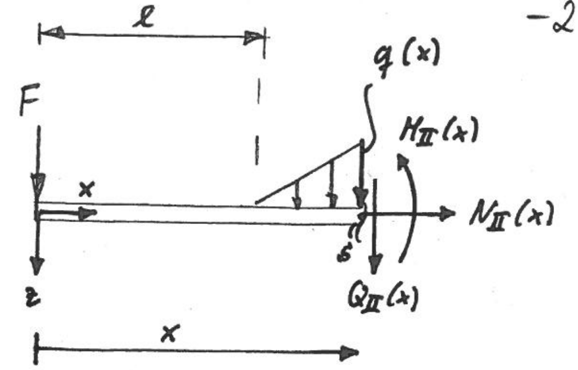
Randbedingungen: $q(x = l) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C_1 \cdot l + C_2 = 0$ (1)

$q(x = 2l) = q_0 \Rightarrow C_1 \cdot 2l + C_2 = q_0$ (2)

$$\Rightarrow C_1 \cdot l = q_0 \Rightarrow \underline{\underline{C_1 = \frac{q_0}{l}}} \quad (3)$$

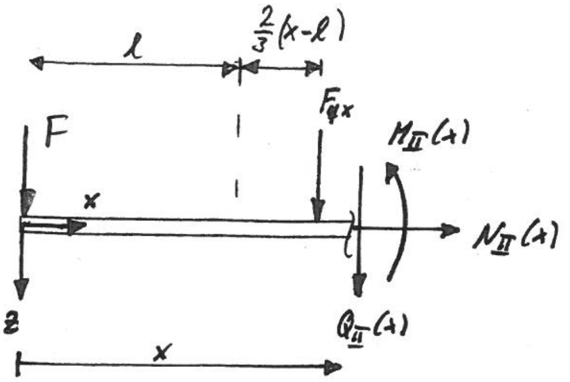
$$(3) \text{ in } (1) \Rightarrow \frac{q_0}{l} \cdot l + C_2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C_2 = -q_0}} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{q(x) = \frac{q_0}{l} x - q_0}}$$



Ersetzen wir nun noch den freigeschnittenen Teil der Streckenlast durch ihre Resultierende:

$$F_{qx} = \frac{1}{2} q(x)\cdot(x-\ell) = \frac{1}{2}\left(\frac{q_0}{\ell}x - q_0\right)(x-\ell) = \underline{\frac{1}{2}\frac{q_0}{\ell}(x-\ell)^2}$$



GGB:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{N_{II}(x) = 0}}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow Q_{II}(x) + F_{qx} + F = 0$$

$$\underline{\underline{Q_{II}(x)}} = -F - F_{qx} = \underline{\underline{-F - \frac{1}{2}\frac{q_0}{\ell}(x-\ell)^2}}$$

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow F\cdot x + F_{qx}\cdot\frac{1}{3}(x-\ell) + M_{II}(x) = 0$$

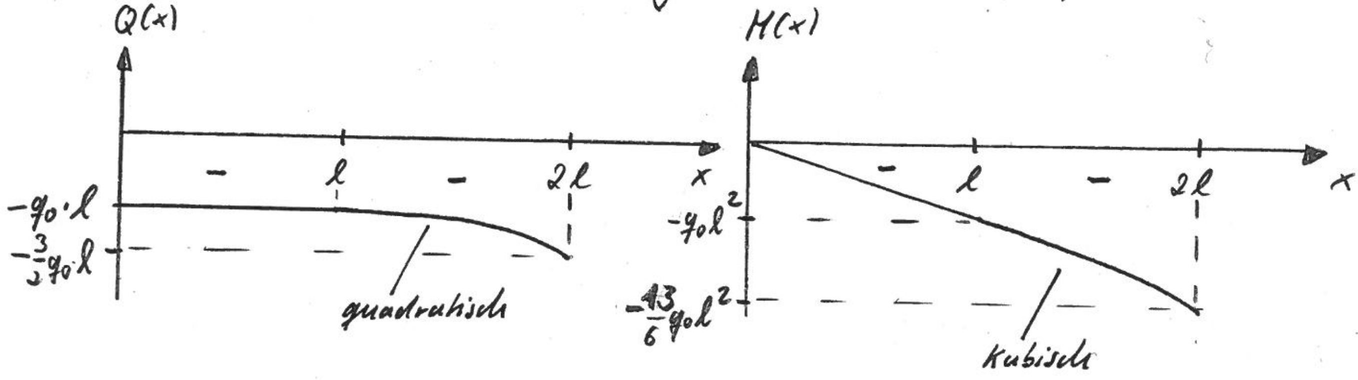
$$\underline{\underline{M_{II}(x) = -Fx - \frac{1}{6}\frac{q_0}{\ell}(x-\ell)^3}}$$

Mit der Vorgabe $F = q_0 \cdot \ell$ ergeben sich folgende Funktionen:

$N_I(x) = 0$ $\quad$ $Q_I(x) = -q_0\cdot\ell$ $\quad$ $M_I(x) = -q_0\ell\cdot x$

$N_{II}(x) = 0$ $\quad$ $Q_{II}(x) = -q_0\cdot\ell - \frac{1}{2}\frac{q_0}{\ell}(x-\ell)^2$ $\quad$ $M_{II}(x) = -q_0\ell x - \frac{1}{6}\frac{q_0}{\ell}(x-\ell)^3$

Graphische Veranschaulichung der Schnittlasten:



Auf N(x) wird aus Banalität (N(x) = 0) verzichtet!