5. Tutorium

Aufgabe 54

(a)

Die notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit eines Fachwerks lautet:

$$2k = s + r \quad , \tag{1}$$

wobei k die Anzahl der Konten, s die Anzahl der Stäbe und r die Anzahl der Auflagerreaktionen ist. Für das gegebene Problem findet man also:

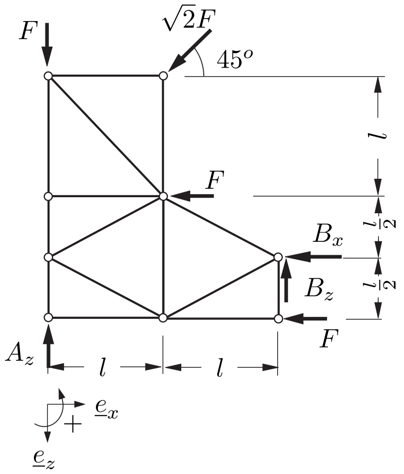
$$2 \cdot 9 = 15 + 3 \tag{2}$$

(b) Die Stäbe 4, 7 und 15 sind offensichtlich Nullstäbe:

- Nullstab 4, weil beim Lager A keine Kraft in x-Richtung
- Nullstab 7, wegen $\Sigma F_x = 0$ (Knoten links)
- Nullstab 15, wegen $\Sigma F_z = 0$ (Knoten unten)

(c)

Freischnittskizze des Gesamtsystems:



Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung:

$$\sum_i F_{i,x} = -B_x - F - F - F \overset{!}{=} 0 \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad B_x = -3F \tag{4}$$

Momentengleichgewicht um A:

$$\sum_j M_j^{(\mathrm{A})} = B_z 2l + B_x \frac{1}{2} l + Fl + F2l - Fl \overset{!}{=} 0 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad B_z = -\frac{1}{4} B_x - F \tag{6}$$

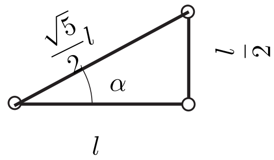
$$\Rightarrow \quad B_z = -\frac{1}{4} F \tag{7}$$

Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung:

$$\sum_i F_{i,z} = -A_z - B_z + F + F \overset{!}{=} 0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad A_z = 2F - B_z \tag{9}$$

$$\Rightarrow \quad A_z = \frac{9}{4} F \tag{10}$$



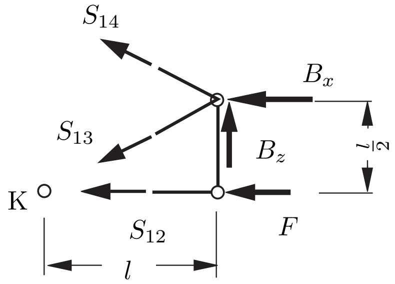
Gemäß der Skizze können die Winkelbeziehungen für α wie folgt bestimmt werden:

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{11}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad . \tag{12}$$

(d)

Die Stabkräfte S_{12}, S_{13} und S_{14} lassen sich mit Hilfe des RITTERschen Schnitt leicht bestimmen.



Da auch dieses freigeschnittene Teilsystem in Ruhe sein soll, müssen hier drei Gleichgewichtsbedingungen formulieren lassen[1].
Momentengleichgewicht um B:

$$\Sigma M^{(\mathrm{B})} = -F\frac{l}{2} - S_{12}\frac{l}{2} \overset{!}{=} 0 \tag{13}$$

$$\Rightarrow \quad S_{12} = -F \tag{14}$$

Momentengleichgewicht um K:

$$\sum_j M_j^{(\mathrm{K})} = S_{14}\left(\cos(\alpha)\frac{l}{2} + \sin(\alpha) l\right) \ldots \tag{15}$$

$$+ B_z l + B_x \frac{l}{2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad S_{14} = \frac{-B_z - B_x \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cos(\alpha) + \sin(\alpha)} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \quad S_{14} = \frac{7}{8}\sqrt{5} F \tag{17}$$

Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung:

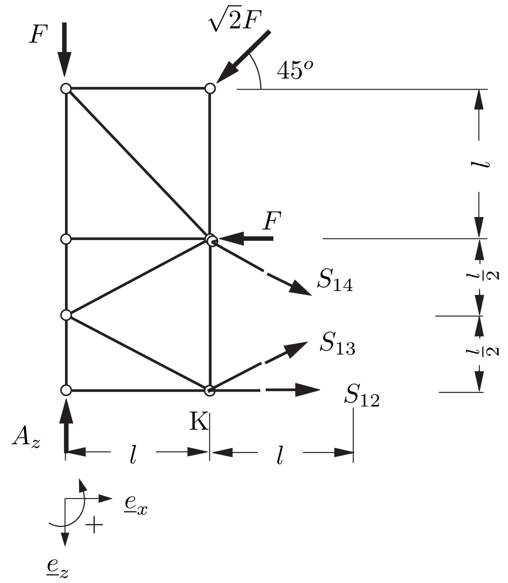
$$\sum_i F_{i,z} = -B_z + S_{13}\sin(\alpha) - S_{14}\sin(\alpha) \overset{!}{=} 0 \tag{18}$$

$$\Rightarrow \quad S_{13} = \frac{B_z}{\sin(\alpha)} + S_{14} \tag{19}$$

$$\Rightarrow \quad S_{13} = \frac{5}{8}\sqrt{5} F \tag{20}$$

Alternativ können die Gleichgewichtsbedingungen auch am linken Teilkörper angesetzt werden.

[1] Laut Definition des RITTERschen Schnitts bilden die drei gesuchten Stabkräfte keine zentrale Kräftegruppe.



Momentengleichgewicht um B:

$$\sum_j M_j^{(\mathrm{B})} = F\frac{l}{2} + F\frac{3}{2}l + Fl \ldots \qquad (21)$$
$$+ F2l - A_z 2l + S_{12}\frac{l}{2} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \quad S_{12} = -10F + 4A_z \qquad (22)$$
$$\Rightarrow \quad S_{12} = -F \qquad (23)$$

Momentengleichgewicht um K:

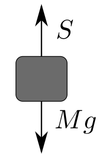
$$\sum_j M_j^{(\mathrm{K})} = -S_{14}\cos(\alpha)l + Fl \ldots \qquad (24)$$
$$+ F2l + Fl - A_z l \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \quad S_{14} = \frac{4F - A_z}{\cos(\alpha)} \qquad (25)$$
$$\Rightarrow \quad S_{14} = \frac{7}{8}\sqrt{5}F \qquad (26)$$

Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung:

$$\sum_i F_{i,z} = -A_z + F + F + S_{14}\sin(\alpha) \ldots \qquad (27)$$
$$- S_{13}\sin(\alpha) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \quad S_{13} = \frac{-A_z + 2F + S_{14}\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} \qquad (28)$$
$$\Rightarrow \quad S_{13} = \frac{5}{8}\sqrt{5}F \qquad (29)$$

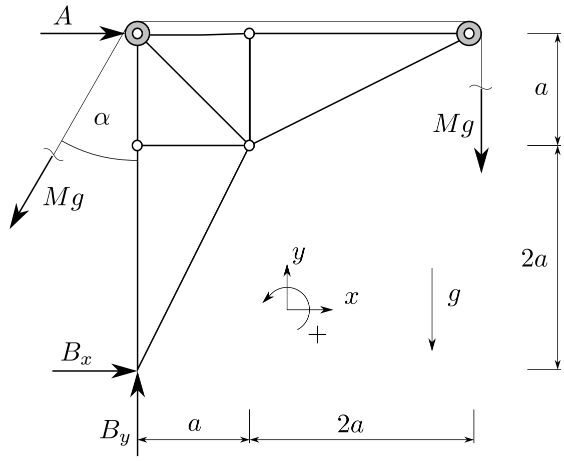
Aufgabe 59

(a) Seilkraft S
Gewicht freischneiden und die Gleichgewichtsbedingung aufstellen:



$$S = Mg \qquad (30)$$

Lagerreaktionen
Fachwerk als Ganzes von der Umgebung freischneiden und Gleichgewichtsbedingungen aufstellen.

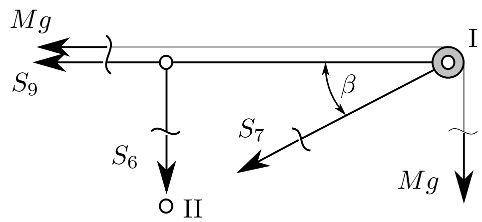


$$\sum M^{(B)} = -Mg \cdot 3a - A \cdot 3a + Mg\sin\alpha \cdot 3a = 0 \qquad (31)$$
$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2}Mg \qquad (32)$$

$$\sum F_x = A + B_x - Mg\sin\alpha = 0 \qquad (33)$$
$$\Rightarrow B_x = Mg \qquad (34)$$

$$\sum F_y = B_y - Mg - \frac{\sqrt{3}}{2}Mg = 0 \qquad (35)$$
$$\Rightarrow B_y = Mg\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (36)$$

(b) Stabkräfte S_6, S_7 und S_9
Ritterschnitt durch die Stäbe 6, 7 und 9.



Trigonometrie:

$$\tan\beta = \frac{1}{2} \qquad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

GGB:

$$\sum M^{(\mathrm{I})} = S_6 \cdot 2a = 0 \tag{37}$$

$$\Rightarrow S_6 = 0 \qquad \text{Nullstab} \tag{38}$$

$$\sum F_y = -Mg - S_6 - S_7 \sin\beta = 0 \tag{39}$$

$$\Rightarrow S_7 = -\sqrt{5}Mg \qquad \text{Druckstab} \tag{40}$$

$$\sum F_x = -Mg - S_9 - S_7 \cos\beta = 0 \tag{41}$$

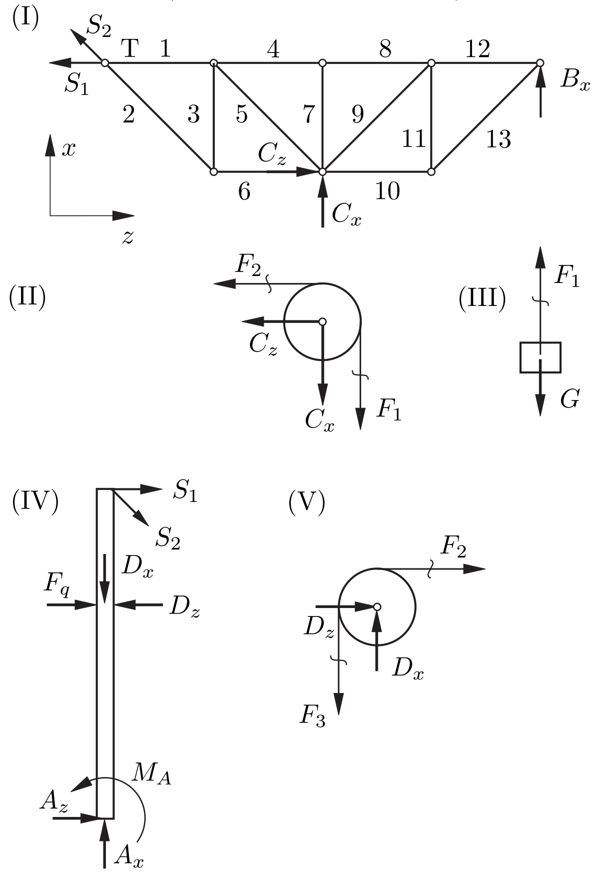
$$\Rightarrow S_9 = Mg \qquad \text{Zugstab} \tag{42}$$

Hausaufgaben

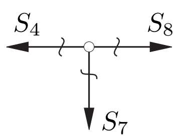
Aufgabe 53

Ein System von starren Körpern befindet sich im Gleichgewicht, wenn jeder einzelne starre Körper für sich im Gleichgewicht ist.

Freimachskizzen (in voller Ausführlichkeit):



(a) Nullstäbe: Stab 7 ist Nullstab!



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow S_7 = 0 \tag{43}$$

(b) Auflagerreaktionen:

Resultierende der Streckenlast F_q

$$F_q = \frac{q_0 \cdot 3a}{2} \tag{44}$$

Teilsystem III

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 = G \tag{45}$$

Teilsystem II

$$\sum M^{(\mathrm{C})} = 0 \Rightarrow F_2 = F_1 = G \tag{46}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = -G \tag{47}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow C_z = -G \tag{48}$$

Teilsystem V

$$\sum M^{(\mathrm{D})} = 0 \Rightarrow F_3 = F_2 = G \tag{49}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = F_3 = G \tag{50}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow D_z = -F_2 = -G \tag{51}$$

Teilsystem IV ($\sum F_x = 0$, $\sum F_z = 0$, $\sum M^{(\mathrm{A})} = 0$)

$$0 = A_x - D_x - \frac{1}{2}\sqrt{2}S_2 \tag{52}$$

$$0 = F_q - D_z + S_1 + A_z + \frac{1}{2}\sqrt{2}S_2 \tag{53}$$

$$0 = M_A + \big(D_z - F_q\big)2a - S_1 3a - S_2\frac{\sqrt{2}}{2}3a \tag{54}$$

Teilsystem I ($\sum F_x = 0$, $\sum F_z = 0$, $\sum M^{(\mathrm{T})} = 0$)

$$0 = B_x + C_x + \frac{1}{2}\sqrt{2}S_2 \tag{55}$$

$$0 = C_z - S_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}S_2 \tag{56}$$

$$0 = B_x 4a + C_x 2a + C_z a \tag{57}$$

Auflösen nach den gesuchten Lagerreaktionen

$$4B_x = 3G \;\Rightarrow\; B_x = \frac{3}{4}G = \frac{3}{2}\,q_0\,a \tag{58}$$

$$\text{aus (55) mit (58): } S_2 = -\sqrt{2}(\frac{3}{4} - 1)\,G = \frac{\sqrt{2}}{4}\,G \tag{59}$$

$$\text{(59) in (56)} \Rightarrow S_1 = -G - \frac{1}{4}\,G = -\frac{5}{4}\,G \tag{60}$$

$$\text{(59) in (52)} \Rightarrow A_x = G + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{4})\,G$$

$$= \frac{5}{4}\,G = \frac{5}{2}\,q_0 a \tag{61}$$

(59) und (60) in (53)

$$\Rightarrow Fq + G - \frac{5}{4}\,G + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,G = -A_z$$

$$A_z = -Fq = -\frac{3}{2}\,q_0\,a \tag{62}$$

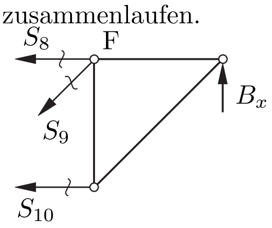
((59) und (18) in (54)

$$\Rightarrow M_A = \Big(-\frac{5}{4}\,G + \frac{1}{4}\,G\Big)\,3a$$

$$+ \Big(\frac{3}{2}\,q_0\,a + G\Big)\,2a = q_0\,a^2 \tag{63}$$

(c) Stabkräfte 8,9,10:

Ritterschnitt: Sollen gezielt nur einige Stabkräfte aus dem Stabwerk berechnet werden, kann man sich des Ritterschnitts bedienen. Dabei ist darauf zu achten, dass die drei Stäbe, durch die geschnitten wird, nicht in einem gemeinsam Punkt zusammenlaufen.



$$\sum M^{(\mathrm{F})} = 0 \Rightarrow S_{10} \cdot a = B_x \cdot a \tag{64}$$

$$S_{10} = Bx = \frac{3}{2} q_0\, a \quad \text{(Zug)} \tag{65}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, S_9 = 0 \tag{66}$$

$$S_9 = \sqrt{2}\, B_x = \frac{3}{2}\sqrt{2}\, q_0\, a \quad \text{(Zug)} \tag{67}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow S_{10} + S_8 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, S_9 = 0 \tag{68}$$

$$S_8 = -\frac{3}{2} q_0\, a - \frac{3}{2} q_0\, a \tag{69}$$

$$S_8 = -\,3\, q_0\, a \quad \text{(Druck)} \tag{70}$$

Aufgabe 58

(a) Notwendige Bedingung:

$$2k = s + r \tag{71}$$

$$\text{Hier:} \quad k = 12, \quad r = 3, \quad s = 21 \tag{72}$$

$$2 \cdot 12 \overset{?}{=} 21 + 3 \quad \checkmark \text{erfüllt.} \tag{73}$$

(b) Freischnitt des Gesamtsystem:
GGB:

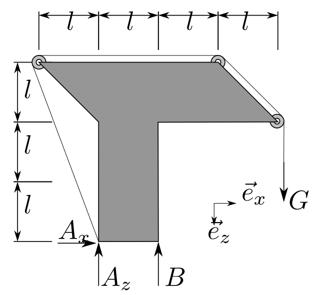
$$\sum F_x = 0 \tag{74}$$

$$\Rightarrow A_x = 0 \tag{75}$$

$$\sum M^{(A)} = 0 \tag{76}$$

$$\Rightarrow B_z l - G3l = 0 \tag{77}$$

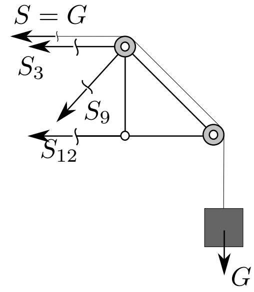
$$\Rightarrow B_z = 3G \tag{78}$$



$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z + B_z - G = 0 \Rightarrow A_z = G - B_z \tag{79}$$

$$\Rightarrow A_z = -2G \tag{80}$$

(c) Ritterschnittverfahren:
Freischnitt:



GGB:

$$\sum M^{(I)} = 0 \Rightarrow G2l - S_3 l - Sl = 0 \tag{81}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_3 = G}} \quad \text{(Zug)} \tag{82}$$

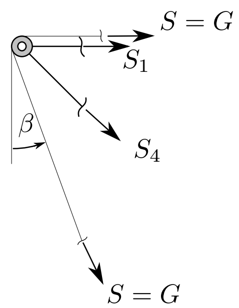
$$\sum M^{(II)} = 0 \Rightarrow Gl + S_{12} l = 0 \tag{83}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_{12} = -G}} \quad \text{(Druck)} \tag{84}$$

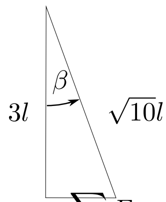
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow G + S_8 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \tag{85}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_8 = -\sqrt{2}G}} \quad \text{(Druck)} \tag{86}$$

(d) Modifizierter Knotenschnitt:



Geometrie:



$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \tag{87}$$

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \tag{88}$$

GGB:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow S_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + S\cos\beta = 0 \tag{89}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_4}} = -\sqrt{2}G\cos\beta = \underline{\underline{-\frac{3}{\sqrt{5}}G}} \tag{90}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow S_1 + G + \frac{1}{\sqrt{2}} S_4 + G\sin\beta = 0 \tag{91}$$

$$\Rightarrow S_1 = -G + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} G - G\frac{1}{\sqrt{10}} \tag{92}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_1 = G\left(\frac{2}{\sqrt{10}} - 1\right)}} \tag{93}$$