2. Tutorium

Aufgabe 12

Vektorielle Lösung

Kraft

$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y = F \cos\alpha \underline{e}_x + F \sin\alpha \underline{e}_y \tag{1}$$

mit

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \tag{2}$$

Vektor vom Bezugspunkt B zum Kraftangriffspunkt A

$$\underline{r}_{BA} = -7a\underline{e}_x - 4a\underline{e}_y \tag{3}$$

Berechnung des Momentes bezüglich des Punktes B mittels Kreuzprodukt

$$\underline{M}^{(B)} = \underline{r}_{BA} \times \underline{F} \tag{4}$$

$$= (4\cos\alpha - 7\sin\alpha)aF\underline{e}_z = -2\sqrt{5}aF\underline{e}_z \tag{5}$$

Bitte beachten Sie, dass das Kreuzprodukt nicht kommutativ ist.

Skalare Lösungsvariante

Berechnung des Hebelarms (Kürzester Abstand des Bezugspunktes B von der Wirkungslinie der Kraft)

$$h = 2\sqrt{5}a. \tag{6}$$

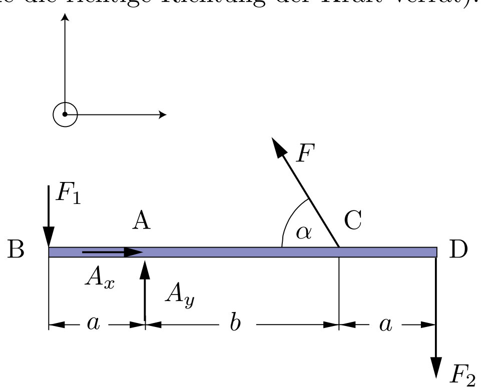
Mithilfe der Rechtsschraubenregel erkennen wir, dass das Moment bezüglich des Punktes B negativ um die z-Achse dreht! Für die skalarwertige z-Komponente des Momentes ergibt sich damit

$$M_z^{(B)} = -hF = -2\sqrt{5}aF, \tag{7}$$

wobei $\underline{M}^{(B)} = M_z^{(B)}\underline{e}_z$.

Aufgabe 15

(a) Das System wird am Festlager freigeschnitten, indem man zwei linear unabhängige Kräfte anträgt (Die Richtung dieser spielt hierbei keine Rolle, da das Vorzeichen am Ende die richtige Richtung der Kraft verrät).



(b) Das Momentengleichgewicht um den Punkt A wird wie folgt formuliert:

$$\sum M_z^A = F_1 a - F_2(a+b) + F\sin\alpha b = 0 \tag{8}$$

Daraus ergibt sich F zu

$$F = \frac{F_2(a+b) - F_1 a}{\sin\alpha b} = 4,5\text{kN}$$

Diese Kraft ist also nötig, um den Balken im statischen Gleichgewicht zu halten. Wird die Kraft nicht aufgebracht, beginnt das System (zumindest im ersten Moment) beschleunigt um den Lagerpunkt zu rotieren.

(c) Mit dem Wert für F können jetzt auch die Lagerreaktionen bestimmt werden. Die resultierenden Kräfte in x- und y-Richtung müssen ebenfalls verschwinden. Daher muss gelten:

$$\sum F_x = A_x - F\cos\alpha = 0 \tag{9}$$

$$\sum F_y = -F_1 + A_y - F_2 + F\sin\alpha = 0 \tag{10}$$

Aus (9) ergibt sich nach umstellen sofort

$$A_x = F\cos\alpha \approx 3,897\text{kN}$$

und aus (10)

$$A_y = F_1 + F_2 - F\sin\alpha = 0,75\text{kN}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 13

(a) Ortsvektoren

$$\underline{r}_{AD} = 2R\underline{e}_x + R\underline{e}_y \tag{11}$$
$$\underline{r}_{AC} = 2R\underline{e}_x + 3R\underline{e}_y \tag{12}$$
$$\underline{r}_{AB} = 3R\underline{e}_y \tag{13}$$

(b) vektorielle Darstellung der äußeren Kraft

$$\underline{F} = F\underline{e}_z \tag{14}$$

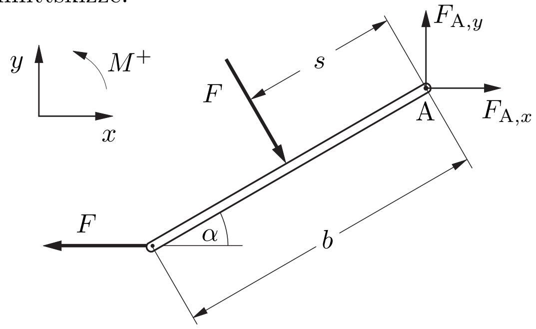
(c) Kreuzprodukt

$$\underline{r}_{AD} \times \underline{F} = \left(2R\underline{e}_x + R\underline{e}_y\right) \times F\underline{e}_z \tag{15}$$
$$= RF\left(-2\underline{e}_y + \underline{e}_x\right) \tag{16}$$

Diese physikalische Größe ist das (Kraft-)Moment der Kraft $\underline{F}$ bezüglich des Punktes A.

Aufgabe 16

Freischnittskizze:



Das aus der Kräftegruppe resultierende Moment bezüglich A erhält man aus der Summe der Einzelmomente, wobei M^+ den positiven Drehsinn angibt.

$$\sum M^{(A)} = F\,s - F\sin(\alpha)\,b \tag{17}$$

Der Hebelarm s soll nun so gewählt werden, dass das resultierende Moment bezüglich A verschwindet.

$$\sum M^{(A)} = F\,s - F\sin(\alpha)\,b = 0 \tag{18}$$

Die Gleichung kann nun leicht nach s umgestellt werden.

$$s = b\,\sin(\alpha) \tag{19}$$

Wie aus der Gleichung ersichtlich ist, hat die Größe der Kräfte F keinen Einfluß auf den zu bestimmenden Abstand s.

$$s = \sin(30°)\,1\text{m} = 0{,}5\text{m} \tag{20}$$

Die Lagerreaktionen $F_{A,x}$ und $F_{A,y}$ folgen aus den Kräftegleichgewichten:

$$\sum_i F_{i,x} = F_{A,x} - F + F\sin(\alpha) \overset{!}{=} 0 \tag{21}$$
$$\Rightarrow F_{A,x} = F\,(1 - \sin(\alpha)) = \frac{F}{2} \tag{22}$$
$$\sum_i F_{i,y} = F_{A,y} - F\cos(\alpha) \overset{!}{=} 0 \tag{23}$$
$$\Rightarrow F_{A,y} = F\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}F}{2} \tag{24}$$