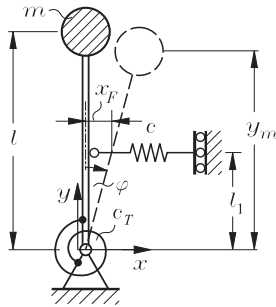


## 15. Tutorium

### Aufgabe 148

- (a) Statisches Momentengleichgewicht um den Fußpunkt des Pendels:



$$0 = \sum M_{\text{äußere}} = M_{c_T} + F_c l_1 \cos \varphi - mgl \sin \varphi$$

mit

$$M_{c_T} = c_T \varphi, \quad F_c = cl_1 \sin \varphi$$

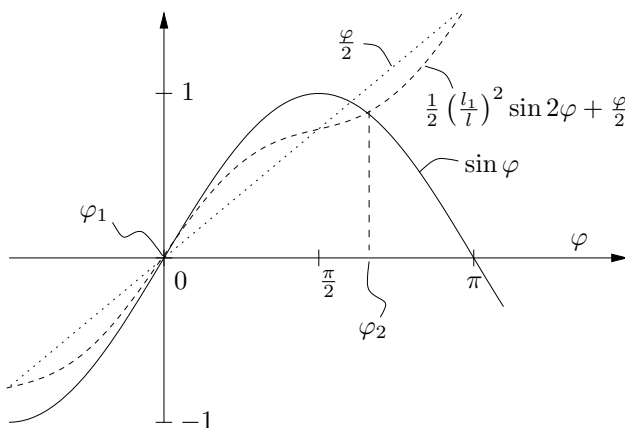
ergibt (mit  $c_T = \frac{1}{2}mgl$ ,  $c = \frac{mg}{l}$ ,  $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$ ):

$$0 = c_T \varphi + (cl_1^2 \cos \varphi - mgl) \sin \varphi$$

$$0 = \frac{1}{2}mgl\varphi + mgl \left( \left( \frac{l_1}{l} \right)^2 \cos \varphi - 1 \right) \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2} \left( \frac{l_1}{l} \right)^2 \sin 2\varphi \quad (1)$$

Eine Lösung der Gleichung (1) ist  $\varphi = 0$ . Die anderen können z.B. grafisch gewonnen werden. Die Lösungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  kann man hier ablesen:



(b) Betrachtet werden soll die Stabilität der Gleichgewichtslage bei  $\varphi = 0$ . Untersucht wird, was kleine Störungen dieser Gleichgewichtslage bewirken. Für kleine Ausschläge  $\varphi \approx \varphi_1 = 0$  kann Gleichung (1) linearisiert werden:

$$\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2} \left( \frac{l_1}{l} \right)^2 2\varphi$$

$$\left( \frac{1}{2} - \left( \frac{l_1}{l} \right)^2 \right) \varphi = 0$$

Für beliebige  $\varphi$  (im Rahmen der Linearisierungsvoraussetzung) ergibt sich demnach Gleichgewicht wenn gilt:

$$\frac{1}{2} - \left( \frac{l_{1,\text{krit}}}{l} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_{1,\text{krit}} = \frac{\sqrt{2}}{2}l \quad (2)$$

Das Gleichgewicht bei  $\varphi = 0$  ist stabil, solange  $l_1 > l_{1,\text{krit}}$  ist.

### Aufgabe 155

- (a) Eulersche Differentialgleichung fürs Knicken:

$$(EIw''')' + Fw'' = 0$$

$$w^{IV} + \lambda^2 w'' = 0 \quad \text{mit } \lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

- (b) Die Kraft aus der Temperaturerhöhung:

$$\sigma_D = E\alpha_T \Delta T$$

$$F_D = EA_s \alpha_T \Delta T$$

- (c)

$$w(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C\lambda x + D \quad (3)$$

$$w'(x) = -A\lambda \sin \lambda x + B\lambda \cos \lambda x + C\lambda \quad (4)$$

$$w''(x) = -A\lambda^2 \cos \lambda x - B\lambda^2 \sin \lambda x = -\frac{1}{EI}M(x) \quad (5)$$

$$w'''(x) = A\lambda^3 \sin \lambda x - B\lambda^3 \cos \lambda x = -\frac{1}{EI}Q(x) \quad (6)$$

Die Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \quad (7)$$

$$w'(0) = 0 \quad (8)$$

$$w'(l) = 0 \quad (9)$$

$$Q(l) = 0 = -EIw'''(l) = 0 \quad (10)$$

aus 7 folgt:  $A + D = 0 \Rightarrow D = -A$

aus 8 folgt:  $B + C = 0 \Rightarrow C = -B$

aus 9 folgt:  $-A \sin \lambda l + B \cos \lambda l + C = 0$

aus 10 folgt:  $A \sin \lambda l - B \cos \lambda l = 0$

Es läßt sich also das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -\sin \lambda l & \cos \lambda l - 1 \\ \sin \lambda l & -\cos \lambda l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

aufstellen. Das System hat eine nichttriviale Lösung für

$$\det \begin{bmatrix} -\sin \lambda l & \cos \lambda l - 1 \\ \sin \lambda l & -\cos \lambda l \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Es bleibt  $\sin \lambda l = 0$ .

Die Lösung lautet also  $\lambda l = n\pi$ , wobei das kleinst mögl.  $n = 1$  ist.

Die kritische Kraft:  $F_{\text{krit}} = EI\lambda^2 = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$

- (d) Die kritische Temperatur:

$$\Delta T_{\text{krit}} = \frac{F_{\text{krit}}}{EA_s \alpha_T}$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T_{\text{krit}}$$

$$T_2 = T_1 + \frac{I\pi^2}{A_s l^2 \alpha_T}$$

## Hausaufgaben

### Aufgabe 149

Allgemeine Differentialgleichung für Knickung:

$$w''''(x) + \lambda^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

Ihre allgemeine Lösung:

$$w(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \lambda x + D \quad (11)$$

wir benötigen davon die erste und dritte Ableitung:

$$w'(x) = -A \lambda \sin \lambda x + B \lambda \cos \lambda x + C \lambda \quad (12)$$

$$w'''(x) = A \lambda^3 \sin \lambda x - B \lambda^3 \cos \lambda x \quad (13)$$

Die zu diesem Problem gehörigen Randbedingungen lauten (vgl. Skizze in der Aufgabenstellung):

$$w(x=0) = 0 \quad (14)$$

$$w'(x=0) = 0 \quad (15)$$

$$w'(x=l) = 0 \quad (16)$$

$$Q(x=l) = 0 = w'''(x=l) \quad Q = \text{Querkraft} \quad (17)$$

Aus Gl. (11) und Gl. (14) ergibt sich Gl. (18), aus Gl. (12) und Gl. (15) ergibt sich Gl. (19):

$$A + D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = -A \quad (18)$$

$$\lambda B + \lambda C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B + C = 0 \quad (19)$$

Gl. (12) mit Gl. (16) ergibt Gl. (20) und Gl. (13) mit Gl. (17) Gl. (21):

$$-A \sin \lambda l + B \cos \lambda l + C = 0 \quad (20)$$

$$A \sin \lambda l - B \cos \lambda l = 0 \quad (21)$$

Addition von Gl. (20) und Gl. (21) ergibt mit Gl. (19):

$$C = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad (22)$$

Mit Gl. (22) und Gl. (18) lassen sich aus Gl. (21) die Knickbedingung Gl. (23) (Eigenwertgleichung) und aus Gl. (11) die spezielle Lösung unseres Problems Gl. (24) (die Eigenform) bestimmen:

$$A \sin \lambda l = 0 \quad (23)$$

$$w(x) = A(\cos \lambda x - 1) \quad (24)$$

Eine sinnvolle Lösung findet sich mit  $A \neq 0$  und  $\lambda \neq 0$  aus Gl. (23):

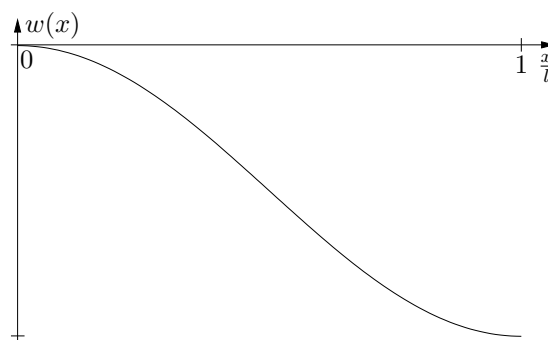
$$\sin \lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = n \frac{\pi}{l} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Der kleinste Eigenwert  $\lambda_1$  liefert die kritische Last:

$$\lambda_1^2 = \frac{F_{\text{krit}}}{EI} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{krit}} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI$$

Die zugehörige Eigenform lautet (aus Gl. (24)):

$$w(x) = A \left( \cos\left(\pi \frac{x}{l}\right) - 1 \right)$$



**Aufgabe 150**

(a) Es wird zuerst Variante 3 betrachtet. Die Varianten 1 und 2 sind Spezialfälle von 3.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sowie ihre Ableitungen lauten:

$$w(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + Cx + D \quad (25)$$

mit  $\lambda^2 = \frac{F}{EI}$ .  
 Ableitungen:

$$w'(x) = -\lambda A \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x + C \quad (26)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 A \cos \lambda x - \lambda^2 B \sin \lambda x \quad (27)$$

$$w'''(x) = \lambda^3 A \sin \lambda x - \lambda^3 B \cos \lambda x \quad (28)$$

Die spezielle Lösung erhält man durch Anpassen der allgemeinen Lösung an die Randbedingungen. Am unteren Rand (Einspannung) gelten die beiden geometrischen Randbedingungen

$$w(0) = 0 \quad (29)$$

$$w'(0) = 0 \quad (30)$$

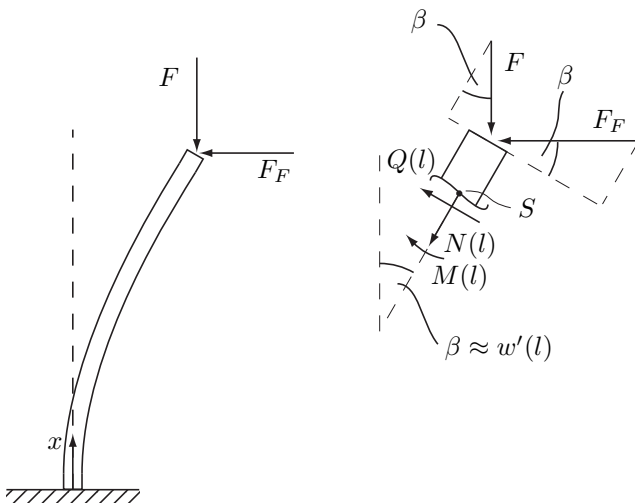
Mit Gleichung (25) und Gleichung (29):

$$A + D = 0 \quad (31)$$

Mit Gleichung (26) und Gleichung (30):

$$\lambda B + C = 0 \quad (32)$$

Freischnitt bei  $x = l$  am verformten System:



$$\sum M_S = 0 \Rightarrow M(l) = 0 \quad (33)$$

$$w''(l) = 0 \quad (34)$$

Mit Gleichung (27) und Gleichung (34):

$$A \cos \lambda l + B \sin \lambda l = 0 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sum Q(x) &= 0 \\ \Rightarrow Q(l) + F_F \cos \beta - F \sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

mit  $F_F = cw(l)$

$$-EIw'''(l) + cw(l) \cos \beta - F \sin \beta = 0 \quad (37)$$

geometrische Linearisierung:  $\cos \beta = 1$ ;  $\sin \beta \approx \beta = w'(l)$

$$-EIw'''(l) + cw(l) - Fw'(l) = 0 \quad (38)$$

mit Gleichung (28), (26) und (25) folgt:

$$\begin{aligned} &-EI\lambda^3[A \sin \lambda l - B \cos \lambda l] \\ &+ c[A \cos \lambda l + B \sin \lambda l + Cl + D] \\ &-F\lambda[-A \sin \lambda l + B \cos \lambda l + \frac{C}{\lambda}] = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Mit  $F = EI\lambda^2$

$$\Rightarrow c[A \cos \lambda l + B \sin \lambda l + Cl + D] - EI\lambda^2 C = 0 \quad (40)$$

=0 mit Gl. (35)

$$\Rightarrow cCl + cD - EI\lambda^2 C = 0 \quad (41)$$

$$\Rightarrow C \left( l - \frac{EI\lambda^2}{c} \right) + D = 0 \quad (42)$$

Weg 1:

Gleichungen (31), (32), (35) und (42) werden als lineares homogenes Gleichungssystem zusammengefasst. Es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l - \frac{EI\lambda^2}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Damit nichttriviale Lösungen existieren, muss die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l - \frac{EI\lambda^2}{c} & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad (44)$$

Diese Forderung ergibt nach kurzer Rechnung (per Hand oder mittels Mathematica o.ä.) die charakteristische Gleichung:

$$\tan \lambda l = \lambda l \left( 1 - \frac{(\lambda l)^2 EI}{cl^3} \right) \quad (45)$$

Für jede Lösung der charakteristischen Gleichung erhält man eine sog. Eigenform. Jede Eigenform (und die daraus resultierenden Schnittlasten) erfüllen alle 4 Randbedingungen und sind damit spezielle Lösungen der Differentialgleichung. Derjenige Wert  $F^*$ , der zum niedrigsten Eigenwert  $\lambda^*$  passt, heißt kritische Last.

Weg 2: Lösung per Handrechnung:

Bestimmung der Konstanten  $A, B, C, D$ : 4 Gleichungen (Gleichung (31), (32) (35) und (42)):

mit  $F = EI\lambda^2$

$$\Rightarrow D = C \left( \frac{EI\lambda^2}{c} - l \right) \quad (46)$$

(46) in (31)

$$\Rightarrow A = -C \left( \frac{EI\lambda^2}{c} - l \right) \quad (47)$$

aus (32)

$$\Rightarrow B = -\frac{C}{\lambda} \quad (48)$$

(47) und (48) in (35)

$$-C \left( \frac{EI\lambda^2}{c} - l \right) \cos \lambda l - \frac{C}{\lambda} \sin \lambda l = 0 \quad (49)$$

$$\Rightarrow C = 0 \text{ (triviale Lösung)} \quad (50)$$

oder

$$\tan \lambda l = -\lambda \left( \frac{EI}{cl^3} - l \right) \quad (51)$$

$$\tan \lambda l = \lambda \left[ 1 - \frac{EI}{cl^3} (\lambda l)^2 \right] \quad (52)$$

Eigenwertgleichung: Numerisch lösbar

Es gilt:  $F_{1\text{krit}} = EI\lambda_1^2$

Fallunterscheidung:

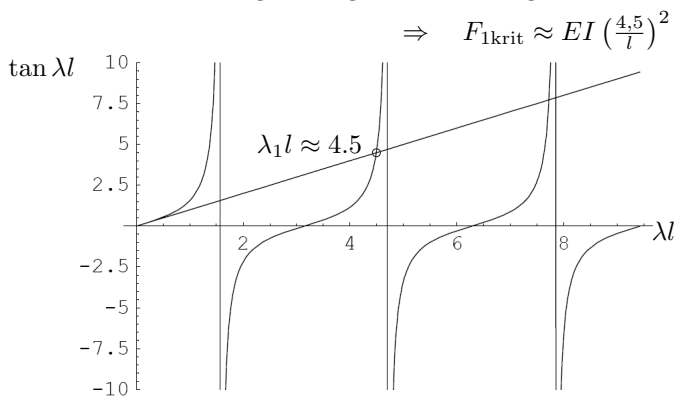
Für  $c \rightarrow \infty$  folgt Fall 1:  $\tan \lambda l = \lambda l$ .

Für  $c \rightarrow 0$  folgt Fall 2:  $\tan \lambda l \rightarrow -\infty$

$\hat{=} \cos \lambda l = 0$

Fall 1:

Numerische beziehungsweise grafische Lösung:



Fall 2:

$$\cos \lambda l = 0 \quad (53)$$

$$\Rightarrow \lambda_n l = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (54)$$

$$\lambda_1 l = \frac{\pi}{2} \quad (55)$$

$$\Rightarrow F_{1\text{krit}} = EI \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \quad (56)$$

(b)

$$F_{\text{krit}1} = F_{\text{krit}2} \quad (57)$$

$$\lambda_{11}^2 = \lambda_{12}^2 \quad (58)$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} \quad (59)$$

$$\Rightarrow \frac{4,5}{l_1} \approx \frac{\pi}{2l_2} \quad (60)$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{9}{\pi} \approx 2,86 \quad (61)$$