

14. Tutorium

Aufgabe 140

Vorbetrachtung: Der eingeprägte Spannungszustand im Element wird durch die Größen σ_{xx} , σ_{yy} und τ_{xy} beschrieben. Es gelten folgende allgemeine Beziehungen:

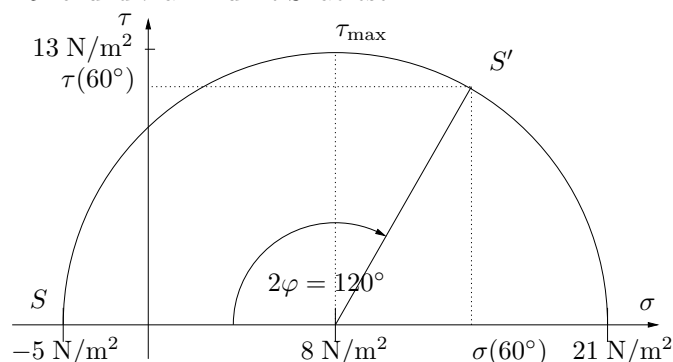
$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (1)$$

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (2)$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2} \quad (3)$$

(a) Konstruktion des MOHRschen Spannungskreises und grafische Lösung:

1. Koordinatensystem zeichnen: Horizontal die σ -Achse; vertikal die τ -Achse. σ_{xx} und σ_{yy} auf der σ -Achse eintragen.
2. τ_{xy} positiv über σ_{xx} und negativ unter σ_{yy} abtragen. Die entstandenen Endpunkte miteinander verbinden und diese Strecke als Durchmesser des Kreises identifizieren. Der Kreismittelpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen σ_{xx} und σ_{yy} auf der σ -Achse.
3. Kreisbogen um den Mittelpunkt schlagen.
4. Trage den Winkel 2φ vom Punkt S (Spannung im Schnitt senkrecht zur x -Achse) zum Punkt S' im Uhrzeigersinn (mathematisch negativer Drehsinn) um den Mittelpunkt an.
5. σ und τ am Punkt S' ablesen.



Der MOHRschen Spannungskreis (Mittelpunkt und Durchmesser) kennzeichnet einen bestimmten Spannungszustand.¹

Ein bestimmter Punkt am Umfang des Kreises bezeichnet die Spannungen im Schnitt unter einem bestimmten Schnittwinkel.²

Der Punkt S mit $\sigma = \sigma_{xx} = -5 \text{ N/m}^2$, $\tau = \tau_{xy} = 0$ bezeichnet die Spannungen in einem Schnitt senkrecht zur x -Achse.

¹Der Spannungszustand ist objektiv im Material vorhanden, unabhängig davon, wie der Beobachter sich einen Schnitt durch das Material denkt.

²Die Spannungen in einem gedachten Schnitt hängen von der Orientierung des gedachten Schnitts bzw. der Wahl des Koordinatensystems ab.

Der Punkt S' mit $\sigma = \sigma(\varphi)$, $\tau = \tau(\varphi)$ bezeichnet die Spannungen in einem Schnitt unter dem Winkel φ zur x -Achse.

Hier lesen wir ab:

$$\sigma(\varphi = 60^\circ) = 14,5 \text{ N/m}^2$$

$$\tau(\varphi = 60^\circ) = 11,25 \text{ N/m}^2$$

Rechnerische Lösung:

Normalspannung:

$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (4)$$

$$\text{hier: } \sigma(\varphi) = \boxed{14,5 \text{ N/m}^2} \quad (5)$$

Schubspannung:

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (6)$$

$$\text{hier: } \tau(\varphi) = \boxed{11,25 \text{ N/m}^2} \quad (7)$$

(b) $\tau_{\max} = ?$; $\varphi(\tau_{\max}) = ?$:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2} \quad (8)$$

$$\text{hier: } \tau_{\max} = \boxed{13 \text{ N/m}^2} \quad (9)$$

Der zugehörige Winkel ergibt sich aus der Skizze des MOHRschen Kreises bzw. aus der Gleichung für die Schubspannung:

aus der Skizze:

$$\varphi(\tau_{\max}) = +45^\circ$$

Aus der notw. Bed. für ein Extremum erhält man:

$$\frac{\partial \tau(2\varphi)}{\partial (2\varphi)} \stackrel{!}{=} 0 \quad (10)$$

$$\tan 2\varphi = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \quad (11)$$

hier

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \implies \boxed{\varphi = \frac{\pi}{4} \pm n\frac{\pi}{2}}$$

(c) Hauptspannungen: Aus der Skizze liest man ab, dass die Richtungen, unter denen die Schubspannungen verschwinden, senkrecht aufeinander stehen. Außerdem liest man aus Skizze ab:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{\max} = \sigma_{yy} \\ &= 21 \text{ N/m}^2 \text{ bei } 2\varphi = 180^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_{\min} = \sigma_{xx} \\ &= -5 \text{ N/m}^2 \text{ bei } 2\varphi = 0^\circ \end{aligned}$$

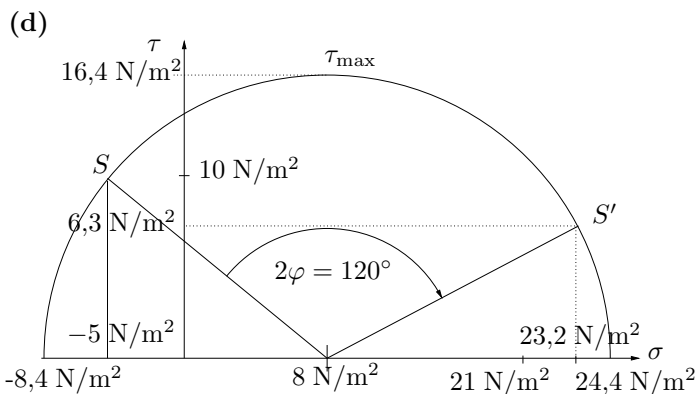
oder

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2} \quad (12)$$

Hauptspannungen = Mittelpunkt \pm Radius

hier: $\tau_{xy} = 0$ und damit:

$$\sigma_1 = \sigma_{xx} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \sigma_{yy} \quad \text{s.o.} \quad (13)$$



Alles nochmals speziell für $\sigma_{xx} = -5 \text{ N/m}^2$, $\sigma_{yy} = 21 \text{ N/m}^2$, $\tau_{xy} = 10 \text{ N/m}^2$ liefert

$$\begin{aligned} \sigma(2\varphi = 120^\circ) &= 23,16 \text{ N/m}^2 \\ \tau(2\varphi = 120^\circ) &= 6,26 \text{ N/m}^2 \\ \sigma_1 &= 24,4 \text{ N/m}^2 \\ \sigma_2 &= -8,4 \text{ N/m}^2 \\ \tau_{\max} &= 16,4 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

φ für Hauptnormalspannungen ?

Bedingung:

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan 2\varphi &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{20}{-5-21} = -\frac{20}{26} \\ \Rightarrow 2\varphi &= -37,6^\circ + n\pi \Rightarrow \varphi = -18,8^\circ + n\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Hauptspannungen und zugehörige Winkel:

$$(\sigma_{\min} = -8,4 \text{ N/m}^2; -18,8^\circ) \quad (14)$$

$$(\sigma_{\max} = 24,4 \text{ N/m}^2; +71,2^\circ) \quad (15)$$

Gesucht ist nun φ für τ_{\max} :

$$\tan 2\varphi = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \quad (16)$$

$$= \frac{26}{20} \quad (17)$$

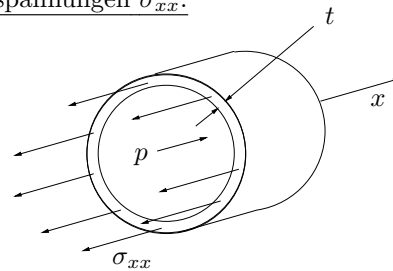
Da nur das Maximum gesucht ist:

$$2\varphi = 52,4^\circ + n2\pi \quad (18)$$

$$\varphi = 26,2^\circ + n\pi \quad (19) \quad \text{(b)}$$

Aufgabe 142

(a) Längsspannungen σ_{xx} :



Kreisringfläche:

$$\begin{aligned} A_K &= \pi(r_a^2 - r_i^2) \quad \text{mit} \quad r_a = R + t; \quad r_i = R \\ &= \pi(r_a - r_i)(r_a + r_i) \\ &= \pi(R + t - R)(R + t + R) = \pi t(2R + t) \\ A_K &= 2\pi R t + \pi t^2 \approx 2\pi R t \quad \text{für} \quad t \ll R \end{aligned}$$

Deckelfläche:

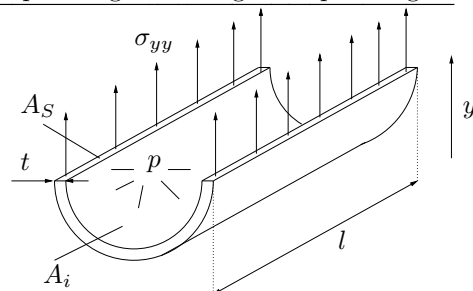
$$A_D = \pi r_i^2 = \pi R^2$$

Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &= -\sigma_{xx} A_K + p A_D \\ 0 &= -\sigma_{xx} 2\pi R t + p \pi R^2 \\ \Rightarrow \sigma_{xx} &= \frac{1}{2} \frac{R}{t} p \end{aligned}$$

mit $t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$; $p = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$; $R = \frac{1}{2} \text{ m}$ folgt $\sigma_{xx} = 5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$

Umfangsspannungen = Tangentialspannungen:



Schnittfläche und Zylinderinnenfläche³:

$$A_S = 2lt$$

$$A_i = 2Rl$$

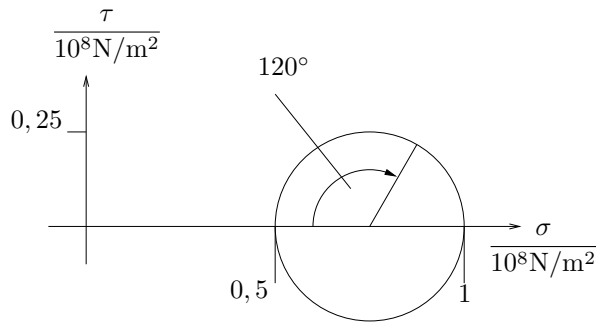
Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_y = 0 = \sigma_{yy} A_S - p A_i$$

$$0 = \sigma_{yy} 2lt - p 2Rl$$

$$\Rightarrow \sigma_{yy} = \frac{R}{t} p = 2\sigma_{xx} = 1 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

³projizierte Fläche! (siehe Erklärung weiter unten im Text)



$$[\vec{f}] = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; \quad [prL] = 1\text{N}; \quad [s] = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

GGB: $2prL = s2L \implies s = pr$

$$\sigma_U = \frac{s}{t} = \frac{pr}{t}$$

(c) grafische Lösung: $\sigma(\varphi = 60^\circ) = 0,875 \cdot 10^8 \text{N/m}^2$;
 $\tau(\varphi = 60^\circ) = 0,2165 \cdot 10^8 \text{N/m}^2$
 rechnerische Lösung:

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi) &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ &= \frac{1,5 \cdot 10^8}{2} \text{N/m}^2 - \frac{0,5 \cdot 10^8}{2} \text{N/m}^2 \cos 120^\circ + 0 \end{aligned}$$

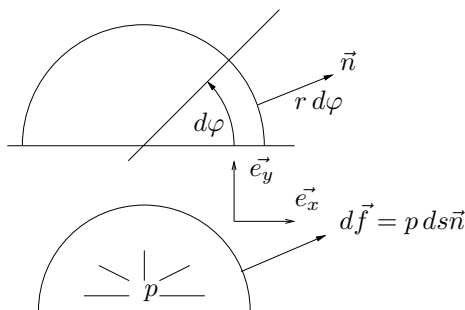
$$\sigma(\varphi = 60^\circ) = 0,875 \cdot 10^8 \text{N/m}^2$$

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \\ &= -\frac{0,5 \cdot 10^8}{2} \text{N/m}^2 \sin 120^\circ + 0 \end{aligned}$$

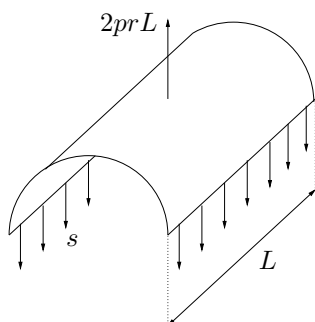
$$\tau(\varphi = 60^\circ) = 0,2165 \cdot 10^8 \text{N/m}^2$$

(d) aus der Skizze des MOHRschen Kreises ist ersichtlich, dass $\tau_{max} = 0,25 \cdot 10^8 \text{N/m}^2$ bei $2\varphi = 90^\circ$ herrscht.

Nachtrag: Erklärung warum die projizierte Fläche relevant ist:



$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \langle \vec{e}_i \rangle \\ d\vec{f} &= pr \, d\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \langle \vec{e}_i \rangle \\ \vec{f} &= \int d\vec{f} = pr \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi \\ &= pr \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{bmatrix}_0^\pi = pr \begin{pmatrix} 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Hausaufgaben

Aufgabe 135

(a) Bestimmung der Hauptspannungen:

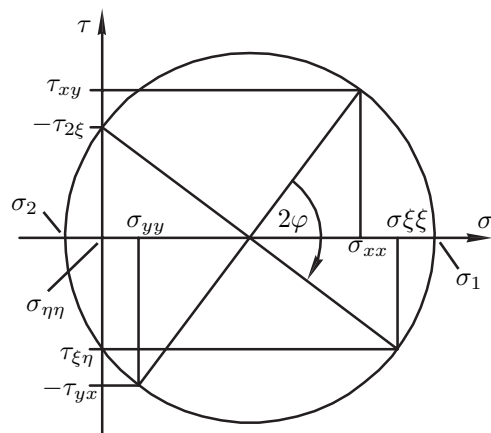
$$\begin{aligned} \sigma_{1/2} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{7+1}{2} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{7-1}{2}\right)^2 + 4^2} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= 4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \pm 5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_2 = -1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

(b) Maximale Schubspannung τ_{max} :

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7-1}{2}\right)^2 + 4^2} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= 5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

(c) Mohrscher Spannungskreis:



(d) Normalspannungen $\sigma_{\xi\xi}$ und $\sigma_{\eta\eta}$ sowie Schubspannung $\tau_{\xi\eta}$ für Drehung um den Winkel φ :

- die Größen können am Mohrschen Kreis abgelesen werden. Oder

- rechnerisch ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ &= 4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + 4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= 8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ &= 4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \\ &= -3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + 0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 136

(a)

1. Hauptspannung σ_{H1}

$$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (20)$$

2. Hauptspannung σ_{H2}

$$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (21)$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 80 \text{ MPa} \quad (22)$$

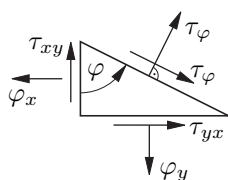
$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 52 \text{ MPa} \quad (23)$$

Ergebnis:

$$\sigma_{H1} = 80 \text{ MPa} + 52 \text{ MPa} = 132 \text{ MPa} > \sigma_x \quad (24)$$

$$\sigma_{H2} = 80 \text{ MPa} - 52 \text{ MPa} = 28 \text{ MPa} < \sigma_y \quad (25)$$

Hauptrichtung φ_H :



Aus GGW am Flächenelement ist die Schubspannung τ_φ :

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (26)$$

Bedingung für φ_H :

$$\tau_\varphi \stackrel{!}{=} 0 \quad (27)$$

↓

$$\varphi_H = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad (28)$$

$$\varphi_H = \frac{1}{2} \arctan(-2,4) = -0,588 \hat{=} -33,6^\circ \quad (29)$$

(b) max. Schubspannung:

$$\left[\text{bei } \varphi_{\tau_{\max}} = \frac{\pi}{4} + \varphi_H = 11,31^\circ \right] \quad (30)$$

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (31)$$

$$= \pm \left(\frac{\sigma_{H1} - \sigma_{H2}}{2}\right) = \pm 52 \text{ MPa} \quad (32)$$

(c) Spannungskomponenten im Koordinatensystem \tilde{x}, \tilde{y} unter $\varphi = 30^\circ$ zum x, y -System:

$$\sigma_{\tilde{x}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &= 80 \text{ MPa} + 20 \text{ MPa} \cos 60^\circ - 48 \text{ MPa} \sin 60^\circ \\ &= 48,43 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tau_{\tilde{x}\tilde{y}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (34)$$

$$\begin{aligned} &= -20 \text{ MPa} \sin 60^\circ - 48 \text{ MPa} \cos 60^\circ \\ &= -41,32 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Die Spur des Spannungstensors (die Summe der Hauptdiagonalelemente der entsprechenden Matrix) ist invariant gegen eine Drehung des Koordinatensystems. (Ebenso die Determinante, aber das wird hier nicht ausgenutzt.)

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\tilde{x}} + \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{H1} + \sigma_{H2} \quad (35)$$

$$\sigma_{\tilde{y}} = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_{\tilde{x}} = 111,57 \text{ MPa} \quad (36)$$

Grafische Lösung:

