

1 Spannungen allgemein

Der Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ repräsentiert einen allgemeinen Spannungszustand:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}_{xyz}$$

2 Ebener Spannungszustand

Für den ebenen Spannungszustand gilt, dass in eine Raumrichtung alle Spannungen null sind. Bsp.: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$. Der Spannungstensor reduziert sich dann zu:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}_{xy}$$

2.1 Koordinatentransformation

Wird unter einem beliebigen Winkel φ geschnitten, transformieren sich die Spannungen wie folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi) \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\varphi) - \tau_{xy} \sin(2\varphi) \quad \text{und} \\ \tau_{\eta\xi} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\varphi) + \tau_{xy} \cos(2\varphi) \end{aligned}$$

2.2 Hauptspannungen und maximale Schubspannungen

Die extremalen Normalspannungen heißen Hauptspannungen und werden berechnet aus

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Die zugehörigen Schnittwinkel ergeben sich aus

$$\tan(2\varphi^*) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Unter diesen Schnittwinkeln sind nicht nur die Normalspannungen extremal, sondern zugleich auch die Schubspannungen Null ($\tau_{\eta\xi} = 0$).

Für die maximalen Schubspannungen gilt:

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Die zugehörigen Schnittwinkel ergeben sich aus

$$\tan(2\tilde{\varphi}) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi^* + \frac{\pi}{4}$$

3 Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises

1. Koordinatensystem zeichnen: Horizontal die σ -Achse; vertikal die τ -Achse. σ_{xx} und σ_{yy} auf der σ -Achse eintragen.
2. τ_{xy} positiv über σ_{xx} und negativ unter σ_{yy} abtragen. Die entstandenen Endpunkte miteinander verbinden und diese Strecke als Durchmesser des Kreises identifizieren. Der Kreismittelpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen σ_{xx} und σ_{yy} auf der σ -Achse.
3. Kreisbogen um den Mittelpunkt schlagen.
4. Den Winkel 2φ vom Punkt S (Spannung im Schnitt senkrecht zur x -Achse) zum Punkt S' im Uhrzeigersinn (mathematisch negativer Drehsinn) um den Mittelpunkt antragen.
5. σ und τ am Punkt S' ablesen.
6. φ ist der Winkel, um den die beiden Bezugssysteme (x, y) und (ξ, η) gegeneinander verdreht sind, im math. positiven Drehsinn.
7. σ_1 und σ_2 sind die beiden Hauptspannungen.

