12. Tutorium

Aufgabe 116

Für das Querverformungsproblem (Biegelinie):

x	w	w'	M	Q
0	$w_I = 0$	–	$M_I = -c_M w_I'$	–
l	$w_I = w_{II}$	$w_I' = w_{II}'$	$M_I = M_{II} + M_0$	$Q_I = Q_{II}$
$2l$	$w_{II} = w_{III}$	–	$M_{II} = 0$ $M_{III} = 0$	$Q_{II} = Q_{III}$
$3l$	$w_{III} = 0$ $w_{IV} = 0$	$w_{III}' = w_{IV}'$	$M_{III} = M_{IV}$	–
$4l$	$w_{IV} = 0$	$w_{IV}' = 0$	–	–

Die Integration der Biegeliniendifferentialgleichung

$$(EIw'')''(x) = q(x) \tag{1}$$

für die vier Bereiche I bis IV führt auf insgesamt 16 Integrationskonstanten. Diese lassen sich mit den oben angegebenen 16 Rand- und Übergangsbedingungen bestimmen.

Aufgabe 113

(a) Nein, zwei einwertige Lager und ein zweiwertiges ergeben zusammen vier Auflagerreaktionskomponenten, die sich nicht allein aus den drei Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen lassen, das System ist statisch unbestimmt. Deshalb lassen sich auch die Schnittlasten nicht allein aus den Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen.

(b) Allgemeine Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung:

Bereich I, $0 \le x < \frac{2}{3}l$:

$$EIw_{\mathrm{I}}''''(x) = q_0 \tag{2}$$

$$EIw_{\mathrm{I}}'''(x) = q_0 l \left\{ \left[\frac{x}{l}\right] + C_1 \right\} \tag{3}$$

$$EIw_{\mathrm{I}}''(x) = q_0 l^2 \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_1\left[\frac{x}{l}\right] + C_2 \right\} \tag{4}$$

$$EIw_{\mathrm{I}}'(x) = q_0 l^3 \left\{ \frac{1}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_1}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_2\left[\frac{x}{l}\right] + C_3 \right\} \tag{5}$$

$$EIw_{\mathrm{I}}(x) = q_0 l^4 \left\{ \frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]^4 + \frac{C_1}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_2}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_3\left[\frac{x}{l}\right] + C_4 \right\} \tag{6}$$

Bereich II, $\frac{2}{3}l < x \le l$:

$$EIw_{\mathrm{II}}''''(x) = q_0 \tag{7}$$

$$EIw_{\mathrm{II}}'''(x) = q_0 l \left\{ \left[\frac{x}{l}\right] + C_5 \right\} \tag{8}$$

$$EIw_{\mathrm{II}}''(x) = q_0 l^2 \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_5\left[\frac{x}{l}\right] + C_6 \right\} \tag{9}$$

$$EIw_{\mathrm{II}}'(x) = q_0 l^3 \left\{ \frac{1}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_5}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_6\left[\frac{x}{l}\right] + C_7 \right\} \tag{10}$$

$$EIw_{\mathrm{II}}(x) = q_0 l^4 \left\{ \frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]^4 + \frac{C_5}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_6}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_7\left[\frac{x}{l}\right] + C_8 \right\} \tag{11}$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$w_{\mathrm{I}}(0) = 0 \tag{12}$$

$$w_{\mathrm{I}}(\frac{2}{3}l) = 0 \tag{13}$$

$$w_{\mathrm{II}}(\frac{2}{3}l) = 0 \tag{14}$$

$$w_{\mathrm{II}}(l) = 0 \tag{15}$$

$$w_{\mathrm{I}}'(\frac{2}{3}l) = w_{\mathrm{II}}'(\frac{2}{3}l) \tag{16}$$

$$M_{\mathrm{I}}(0) = 0 \qquad \Rightarrow\ w_{\mathrm{I}}''(0) = 0 \tag{17}$$

$$M_{\mathrm{I}}(\frac{2}{3}l) = M_{\mathrm{II}}(\frac{2}{3}l) \qquad \Rightarrow\ w_{\mathrm{I}}''(\frac{2}{3}l) = w_{\mathrm{II}}''(\frac{2}{3}l) \tag{18}$$

$$M_{\mathrm{II}}(l) = 0 \qquad \Rightarrow\ w_{\mathrm{II}}''(l) = 0 \tag{19}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Einsetzen nach längerer Rechnung die folgenden Konstanten:

$$C_1 = -\frac{13}{48} \qquad C_2 = 0 \tag{20}$$

$$C_3 = \frac{5}{648} \qquad C_4 = 0 \tag{21}$$

$$C_5 = -\frac{23}{24} \qquad C_6 = \frac{11}{24} \tag{22}$$

$$C_7 = -\frac{47}{324} \qquad C_8 = \frac{11}{324} \tag{23}$$

Für die Auflagerkräfte wird der Querkraftverlauf benötigt. Mit

$$-EIw''(x) = M(x)\,,\ M'(x) = Q(x) \tag{24}$$

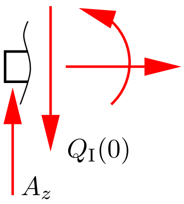
$$-EIw'''(x) = Q(x) \tag{25}$$

ergibt sich

$$Q_{\mathrm{I}}(x) = q_0 l \left\{ \frac{13}{48} - \left[\frac{x}{l}\right] \right\} \tag{26}$$

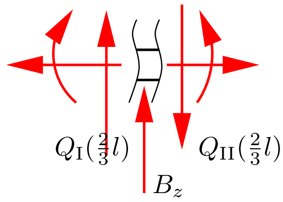
$$Q_{\mathrm{II}}(x) = q_0 l \left\{ \frac{23}{24} - \left[\frac{x}{l}\right] \right\} \tag{27}$$

Freischnitt und Gleichgewicht am linken Ende:



$$A_z = Q_{\mathrm{I}}(0) = \frac{13}{48} q_0 l \tag{28}$$

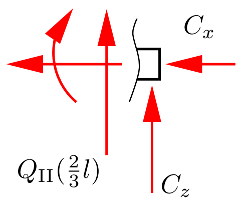
Freischnitt und Gleichgewicht am mittleren Lager:



$$B_z = Q_{\mathrm{II}}(\frac{2}{3}l) - Q_{\mathrm{I}}(\frac{2}{3}l) \tag{29}$$

$$= \frac{11}{16} q_0 l \tag{30}$$

Freischnitt und Gleichgewicht am rechten Lager:



$$C_z = -Q_{\mathrm{II}}(l) = \frac{1}{24} q_0 l \tag{31}$$

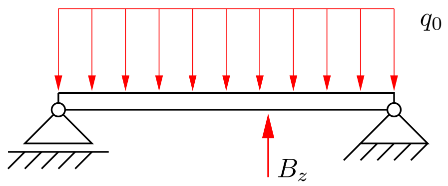
(Und $C_x = 0$ aus Gleichgewicht für den gesamten Balken.)

(c)

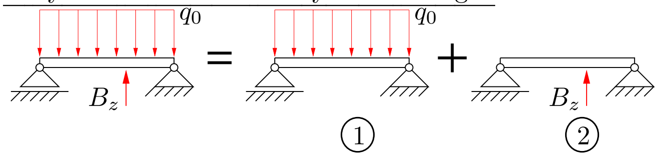
1. Statisch bestimmtes Ersatzsystem:

Ersetze eine Fesselung durch ihre unbekannte Reaktionslast. Diese wird nun im folgenden als äußere Last behandelt (als wenn sie bekannt wäre).

Zum Beispiel wird das mittlere Lager B durch die Kraft B_z ersetzt und wir erhalten folgendes statisch bestimmte Ersatzsystem:



2. System in einfache Teilsysteme zerlegen



Superpositionsprinzip: Die Gesamtverformung ergibt sich aus der Summe der Verformung der Teilsysteme:

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) \tag{32}$$

3. Lösungen der einfachen Teilsysteme z.B. aus Tabellenwerk (Hütte, Dubbel o. ä.):

$$w_1(x) = \frac{q_0 l^4}{EI} \left\{ \frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]^4 - \frac{1}{12}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right] \right\} \tag{33}$$

$$\Rightarrow\ w_1(\frac{2}{3}l) = \frac{11}{972}\frac{q_0 l^4}{EI} \tag{34}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} w_{2\,\mathrm{I}}(x) & ;\ x < \frac{2}{3}l \\ w_{2\,\mathrm{II}}(x) & ;\ x > \frac{2}{3}l \end{cases}, \quad \text{mit} \tag{35}$$

$$w_{2\,\mathrm{I}}(x) = \frac{B_z l^3}{EI} \left\{ \frac{1}{18}\left[\frac{x}{l}\right]^3 - \frac{4}{81}\left[\frac{x}{l}\right] \right\} \quad \text{und} \tag{36}$$

$$w_{2\,\mathrm{II}}(x) = \frac{B_z l^3}{EI} \left\{ -\frac{1}{9}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{1}{3}\left[\frac{x}{l}\right]^2 - \frac{22}{81}\left[\frac{x}{l}\right] + \frac{4}{81} \right\} \tag{37}$$

$$\Rightarrow\ w_2(\frac{2}{3}l) = -\frac{4}{243}\frac{B_z l^3}{EI} \tag{38}$$

4. Geometrische Verträglichkeitsbedingung (Zwangsbedingung)

$$w(\frac{2}{3}l) = 0 \tag{39}$$

Die Auswertung der Zwangsbedingung liefert uns die unbekannte Reaktionskraft B_z:

$$w_1(\frac{2}{3}l) + w_2(\frac{2}{3}l) \stackrel{!}{=} 0 \tag{40}$$

$$\Rightarrow\ B_z = \frac{11}{16} q_0 l \tag{41}$$

Das ist das gleiche Ergebnis wie in Teil (b), siehe Gl. (30).

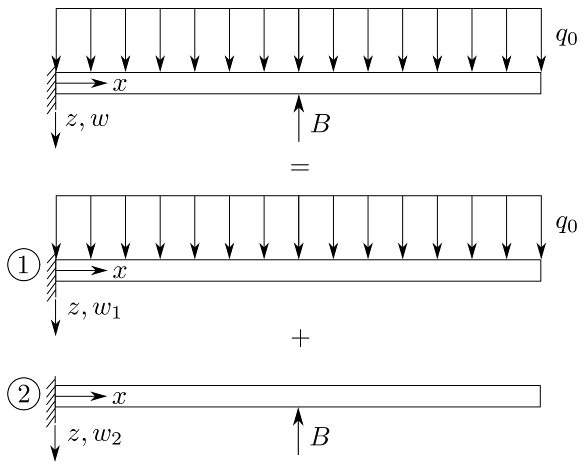
(d) Der Verdrehwinkel oder die Neigung ist (bei kleinen Verformungen) gleich der ersten Ableitung der Biegelinie an dieser Stelle:

$$\varphi_A = w_{\mathrm{I}}{}'(0) = \frac{q_0 l^3}{EI} C_3 = \frac{5}{648}\frac{q_0 l^3}{EI} \tag{42}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 115

Auflagerkraft B wird als „statisch Unbestimmte“ behandelt und das Ersatzsystem wird in zwei einfache Teilsysteme zerlegt.

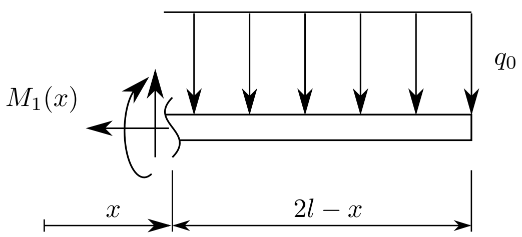


Superposition:

$$w(x, B) = w_1(x) + w_2(x, B) \tag{43}$$

Zunächst wird die Biegelinie der (quasi statisch bestimmten) Teilsysteme bestimmt.

Teilsystem 1



GGB:

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow M_1(x) = -\frac{1}{2} q_0 (2l - x)^2 \tag{44}$$

MSG:

$$-EI_y w_1''(x) = -\frac{1}{2} q_0 (2l - x)^2 \tag{45}$$

$$-EI_y w_1'(x) = \frac{1}{6} q_0 (2l - x)^3 + C_1 \tag{46}$$

$$-EI_y w_1(x) = -\frac{1}{24} q_0 (2l - x)^4 + C_1 x + C_2 \tag{47}$$

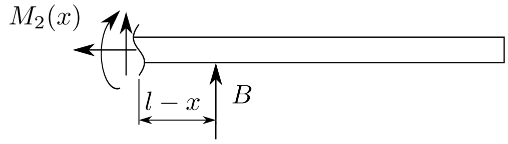
Geometrische RB:

$$w_1(0) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3} q_0 l^4 \tag{48}$$

$$w_1'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{4}{3} q_0 l^3 \tag{49}$$

$$\Rightarrow w_1(x) = \frac{q_0 l^4}{24 EI_y} \left[\left(2 - \frac{x}{l}\right)^4 + 32 \frac{x}{l} - 16 \right] \tag{50}$$

Teilsystem 2
Hier wird nur die Biegelinie im ersten Bereich benötigt ($0 \leq x \leq l$).



GGB:

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow M_2(x, B) = B(l - x) \tag{51}$$

MSG:

$$-EI_y w_2''(x, B) = B(l - x) \tag{52}$$

$$-EI_y w_2'(x, B) = Blx - \frac{1}{2} B x^2 + C_3 \tag{53}$$

$$-EI_y w_2(x, B) = Bl \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} B x^3 + C_3 x + C_4 \tag{54}$$

Geometrische RB:

$$w_2(0, B) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \tag{55}$$

$$w_2'(0, B) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \tag{56}$$

$$\Rightarrow w_2(x, B) = \frac{1}{6} \frac{Bl^3}{EI_y} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \tag{57}$$

Biegelinie des Ersatzsystems ($0 \leq x \leq l$)

$$\begin{aligned} w(x, B) = {} & \frac{q_0 l^4}{24 EI_y} \left[\left(2 - \frac{x}{l}\right)^4 + 32 \frac{x}{l} - 16 \right] \\ & + \frac{1}{6} \frac{Bl^3}{EI_y} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \end{aligned} \tag{58}$$

Geometrische Verträglichkeitsbedingung

$$w(l, B) \stackrel{!}{=} 0 \tag{59}$$

$$\Rightarrow \frac{q_0 l^4}{24 EI_y} \left[1^4 + 32 - 16\right] + \frac{1}{6} \frac{Bl^3}{EI_y} \left[1^3 - 3\right] = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{17}{8} q_0 l}} \tag{60}$$

(b) Biegemoment bei $x = 0$

$$\begin{aligned} M(x = 0) &= M_1(x = 0) + M_2(x = 0, B = \frac{17}{8} q_0 l) \\ &= -2 q_0 l^2 + \frac{17}{8} q_0 l^2 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{8} q_0 l^2}} \end{aligned} \tag{61}$$

(c) Neigungswinkel bei $x = l$

$$\varphi_B := w'(x = l) \tag{62}$$

mit

$$\begin{aligned} w'(x) = {} & \frac{q_0 l^3}{24 EI_y} \left[-4 \left(2 - \frac{x}{l}\right)^3 + 32 \right] \\ & + \frac{17 q_0 l^3}{48 EI_y} \left[3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 6 \frac{x}{l} \right] \end{aligned} \tag{63}$$

$$
\begin{aligned}
w'(x=l) &= \frac{q_0 l^3}{24EI_y}\left[-4+32\right] + \frac{17q_0 l^3}{48EI_y}\left[3-6\right] \\
&= \frac{q_0 l^3}{EI_y}\left[\frac{7}{6} - \frac{17}{16}\right] \\
&= \underline{\underline{\frac{5q_0 l^3}{48EI_y}}}
\end{aligned}
\tag{64}
$$
