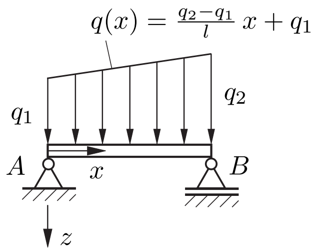
11. Tutorium

Aufgabe 104

(a)



Es handelt sich um ein *statisch bestimmtes* System, d.h. man kann alleine mit den Gleichgewichtsbedingungen oder den Schnittlastendifferentialgleichungen das Schnittmoment bestimmen.

$$M(x) = \frac{1}{6}(2q_1 + q_2)\,l \cdot x - \frac{q_2 - q_1}{6l}\,x^3 - q_1\,\frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

Dieses ist proportional zur linearen Krümmung (Material-Strukturgleichung für den Biegebalken): $M = -EIw''$, w'' $\approx$ Krümmung. Durch anschließende zweimalige Integration erhält man die Biegelinie.

$$EIw(x) = \frac{q_2 - q_1}{120l}\,x^5 + q_1\,\frac{x^4}{24} - \frac{1}{36}(2q_1 + q_2)\,l \cdot x^3 + C_3 x + C_4 \qquad (2)$$

Die Konstanten C_3 und C_4 erhält man aus den geometrischen Randbedingungen, siehe dazu auch das klassische Schema weiter unten.

Die folgende Lösung beinhaltet die viermalige Integration der Biegeliniendifferentialgleichung, die auch bei *statisch unbestimmten* Systemen zur Anwendung kommt:

$$q(x) = EIw''''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,x + q_1 \qquad (3)$$

$$-Q(x) = EIw'''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^2}{2} + q_1 x + C_1 \qquad (4)$$

$$-M(x) = EIw''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^3}{6} + q_1\,\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \qquad (5)$$

$$EIw'(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^4}{24} + q_1\,\frac{x^3}{6} + C_1\,\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \qquad (6)$$

$$EIw(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^5}{120} + q_1\,\frac{x^4}{24} + C_1\,\frac{x^3}{6} + C_2\,\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \qquad (7)$$

Geometrische und physikalische Randbedingungen:

$$M(x = 0) = 0 \qquad (8)$$
$$M(x = l) = 0 \qquad (9)$$
$$w(x = 0) = 0 \qquad (10)$$
$$w(x = l) = 0 \qquad (11)$$

$$(8) \;\rightarrow\; C_2 = 0 \qquad (12)$$

$$(9) \;\rightarrow\; (q_2 - q_1)\,\frac{l^2}{6} + q_1\,\frac{l^2}{2} + C_1 l = 0$$

$$\rightarrow\; \underline{C_1 = -\frac{q_1 l}{3} - \frac{q_2 l}{6}} \qquad (13)$$

$$(10) \;\rightarrow\; C_4 = 0 \qquad (14)$$

$$(11) \;\rightarrow\; (q_2 - q_1)\,\frac{l^4}{120} + q_1\,\frac{l^4}{24} - \frac{q_1 l}{3}\,\frac{l^3}{6} - \frac{q_2 l}{6}\,\frac{l^3}{6} + C_3 l = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{q_2 l^3}{120} - \frac{q_1 l^3}{120} + \frac{q_1 l^3}{24} - \frac{q_1 l^3}{18} - \frac{q_2 l^3}{36} + C_3 = 0 \qquad (16)$$

$$\rightarrow\; \underline{C_3 = \frac{q_1 l^3}{45} + \frac{7 q_2 l^3}{360}} \qquad (17)$$

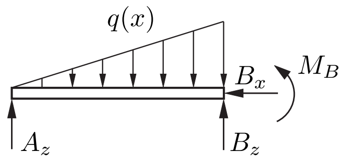
$\rightarrow$ Biegelinie:

$$w(x) = \frac{l^4}{360\,EI}\Big[3(q_2 - q_1)\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 + 15 q_1\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 - (20q_1 + 10q_2)\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + (8q_1 + 7q_2)\Big(\frac{x}{l}\Big)\Big] \qquad (18)$$

(b) Um die maximale Durchsenkung zu ermitteln, muß die Gleichung $w'(x_\mathrm{e}) = 0$ für $0 < x < \ell$ gelöst werden, z.B numerisch für konkrete Werte q_1 und q_2. Dann läßt sich das Extremum der Durchsenkung $w_{\max} = w(x_\mathrm{e})$ bestimmen. Die so gewonnenen lokalen Extrema müssen dann noch mit den Werten an den Intervallgrenzen verglichen werden, die hier jedoch Null sind.

Aufgabe 112

(a) statische Bestimmtheit?



Die vier unbekannten A_z, B_z, B_x, M_B der Lagerreaktionen können aus den drei Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene nicht bestimmt werden. Das System ist statisch unbestimmt.

(b) Integration der Biegeliniendifferentialgleichung:

$$\big(EI\,w''\big)''(x) = q(x) = \frac{q_0}{l}\,x \qquad (19)$$

$$\big(EI\,w''\big)'(x) = -Q(x) = \frac{q_0 l}{2}\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + C_1 \qquad (20)$$

$$EI\,w''(x) = -M(x) = \frac{q_0 l^2}{6}\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + C_1 l\Big(\frac{x}{l}\Big) + C_2 \qquad (21)$$

$$EI\,w'(x) = \frac{q_0 l^3}{24}\Big(\frac{x}{l}\Big)^4 + \frac{C_1 l^2}{2}\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + C_2 l\Big(\frac{x}{l}\Big) + C_3 \qquad (22)$$

$$EI\,w\,(x) = \frac{q_0 l^4}{120}\Big(\frac{x}{l}\Big)^5 + \frac{C_1 l^3}{6}\Big(\frac{x}{l}\Big)^3 + \frac{C_2 l^2}{2}\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 + C_3 l\Big(\frac{x}{l}\Big) + C_4 \qquad (23)$$

Geometrische und physikalische Randbedingungen:

$$w\,(x=0)=0 \tag{24}$$
$$w\,(x=l)=0 \tag{25}$$
$$M(x=0)=0 \tag{26}$$
$$w'\,(x=l)=0 \tag{27}$$

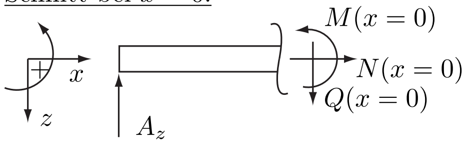
$$\text{Gl. (24) in (23)}: \quad C_4 = 0 \tag{28}$$
$$\text{Gl. (26) in (21)}: \quad C_2 = 0 \tag{29}$$
$$\text{Gl. (27) in (22)}: \quad C_3 = -q_0\frac{l^3}{24} - C_1\frac{l^2}{2} \tag{30}$$
$$\text{Gl. (25) in (23)}: \quad 0 = \frac{q_0 l^4}{120} + C_1\frac{l^3}{6} + C_3 l \tag{31}$$

mit (30) ergibt sich:

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{10} \tag{32}$$
$$C_3 = \frac{q_0 l^3}{120} \tag{33}$$

Auflagerreaktion in A:

Schnitt bei $x = 0$:



$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q(x=0)$$
$$A_z = Q(x=0) \tag{34}$$

aus Gl. (20):

$$\begin{aligned} Q(x) &= -(EIw'')'(x) \\ &= -\frac{q_0 l}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - C_1 \end{aligned}$$

mit Gl. (32) und (34):

$$Q(x=0) = A_z = \frac{q_0 l}{10} \tag{35}$$

(c) Biegelinie bestimmen:
Gleichungen (28), (29), (32) und (33) in (23):

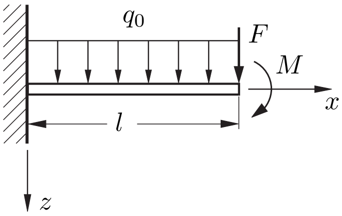
$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{120\;EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^5 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)\right] \tag{36}$$

(d) Verdrehwinkel φ_A in A:

$$w'(x) = \frac{q_0 l^3}{120\;EI}\left[5\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1\right] \tag{37}$$
$$\varphi_A = w'(x=0) = \frac{q_0 l^3}{120\;EI} \tag{38}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 106

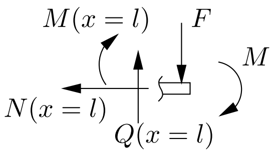


Biegelinie:

$$
\begin{aligned}
EI\,w''''(x) &= q_0 && (39)\\
EI\,w'''(x) &= q_0 \cdot x + C_1 && (40)\\
EI\,w''(x) &= \frac{1}{2}q_0x^2 + C_1x + C_3 && (41)\\
EI\,w'(x) &= \frac{1}{6}q_0x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3 && (42)\\
EI\,w\,(x) &= \frac{1}{24}q_0x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4 && (43)
\end{aligned}
$$

<u>Randbedingung:</u>

$$
\begin{aligned}
&1) \quad w\,(0) = 0 && (44)\\
&2) \quad w'(0) = 0 && (45)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&3)\ EI\,w''\,(x=l) = -M(x=l) = M && (46)\\
&4)\ EI\,w'''(x=l) = -Q(x=l) = -F && (47)
\end{aligned}
$$

$$1) \Rightarrow\ C_4 = 0 \qquad 2) \Rightarrow\ C_3 = 0 \qquad (48)$$

$$3),\,4) \Rightarrow\ C_2 = M + Fl + \frac{1}{2}q_0l^2\,;\ C_1 = -F - q_0l \qquad (49)$$

$\hat{w}$ ist die Durchsenkung $w(l)$ am rechten Rand ($x = l$). S. Gl. (43):

$$
\begin{aligned}
\hat{w} = w(l) &= \frac{1}{EI}\Big[\frac{1}{24}q_0l^4 + \big(M + Fl + \frac{1}{2}q_0l^2\big)\cdot\frac{l^2}{2}\\
&\qquad + \frac{l^3}{6}\big(-F - q_0l\big)\Big] && (50)\\
&= \frac{1}{EI}\Big(\frac{Ml^2}{2} + \frac{1}{3}F\cdot l^3 + \frac{1}{8}q_0l^4\Big)\\
&\overset{!}{=} \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} + \frac{q_0l^4}{8EI} && (51)
\end{aligned}
$$

$\varphi(x) = w'(x)$, Biegewinkel am rechten Rand: $\hat{\varphi} = w'(l)$ aus Gl. (42):

$$
\begin{aligned}
\varphi(l) &= \frac{1}{EI}\Big[\frac{1}{6}q_0l^3 + \big(M + F\,l + \frac{1}{2}q_0l^2\big)l && (52)\\
&\qquad + \frac{l^2}{2}(-F - q_0l)\Big] && (53)\\
\hat{\varphi} &= \frac{1}{EI}\Big(Ml + \frac{Fl^2}{2} + \frac{q_0l^3}{6}\Big)\\
&\overset{!}{=} \frac{F\,l^2}{2EI} + \frac{M\,l}{EI} + \frac{q_0l^3}{6EI} && (54)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 109

(a) Allgemein gilt (für über den Balken konstantes I und E):

$$EIw''''(x) = q(x) \qquad (55)$$

Und für die spezielle Streckenlast in dieser Aufgabe:

$$EIw''''(x) = q_0\frac{x}{l} \qquad (56)$$

(b) Um die allgemeine Lösung zu erhalten wird Gleichung (56) hochintegriert:

$$
\begin{aligned}
EIw'''(x) &= \frac{1}{2}\frac{q_0}{l}x^2 + C_1 && (57)\\
EIw''(x) &= \frac{1}{6}\frac{q_0}{l}x^3 + C_1x + C_2 && (58)\\
EIw'(x) &= \frac{1}{24}\frac{q_0}{l}x^4 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3 && (59)\\
EIw(x) &= \frac{1}{120}\frac{q_0}{l}x^5 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4 && (60)
\end{aligned}
$$

Die *dynamischen* Randbedingungen finden sich hier am linken Rand:

$$
\begin{aligned}
F_{qz}(x=0) &\overset{!}{=} F && (61)\\
\Rightarrow\quad EIw'''(x=0) &= -F && (62)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{by}(x=0) &\overset{!}{=} 0 && (63)\\
\Rightarrow\quad EIw''(x=0) &= 0 && (64)
\end{aligned}
$$

Die *geometrischen* Randbedingungen finden sich hier am rechten Rand (um diese Größen später besser einsetzen zu können, werden die Gleichungen mit EI multipliziert):

$$
\begin{aligned}
w(x=l) &\overset{!}{=} 0 && (65)\\
\Rightarrow\quad EIw(x=l) &= 0 && (66)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(x=l) &\overset{!}{=} 0 && (67)\\
\Rightarrow\quad EIw'(x=l) &= 0 && (68)
\end{aligned}
$$

(c) Nun werden mit Hilfe der Randbedingungen die Unbekannten ausgerechnet:
(62) in (57):

$$\Rightarrow \qquad \boxed{C_1 = -F} \qquad (69)$$

(64) in (58):

$$\Rightarrow \qquad \boxed{C_2 = 0} \qquad (70)$$

(66) in (59) mit (69) und (70):

$$\Rightarrow \qquad \boxed{C_3 = -\frac{1}{24}q_0l^3 + \frac{1}{2}Fl^2} \qquad (71)$$

(68) in (60) mit (69), (70) und (71):

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_4 = \frac{1}{30} q_0 l^4 - \frac{1}{3} F l^3} \tag{72}$$

(d) Aus (59) mit $\varphi_A = w'(x=0)$:

$$EIw'(x=0) = C_3 \tag{73}$$

Und mit (71):

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi_A = \left(-\frac{1}{24} q_0 l^3 + \frac{1}{2} F l^2 \right) \frac{1}{EI}} \tag{74}$$

(e) Gefordert ist:

$$w(0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{75}$$

Aus Gleichung (60):

$$\Rightarrow \quad C_4 = 0 \tag{76}$$

Das in Gleichung (72) eingesetzt und nach F aufgelöst:

$$\Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{1}{10} q_0 l} \tag{77}$$
