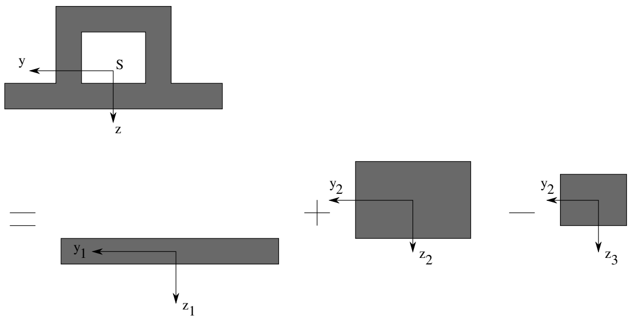
Tutorium

Aufgabe 120

Bestimmen der Schwerpunktskoordinate



Berechnet wird der Abstand z_s des Schwerpunktkoordinatensystems y, z zum Koordinatensystem y_1, z_1.

Tabellenverfahren

	A_i	z_i	$A_i z_i$
1	$10 \cdot b^2$	0	0
2	$18 \cdot b^2$	$-2b$	$-36 \cdot b^3$
3	$-8 \cdot b^2$	$-\frac{3}{2}b$	$12 \cdot b^3$
$\sum$	$20 \cdot b^2$		$-24 \cdot b^3$

$$z_s = -\frac{6}{5}b \tag{1}$$

Bestimmen des FTM

Es gilt:

$$I_y = I_{1,y} + I_{2,y} - I_{3,y} \tag{2}$$
$$I_y = I_{1,y_1} + z_{s1}^2 A_1 + I_{2,y_2} + z_{s2}^2 A_2 - I_{3,y_3} - z_{s3}^2 A_3 \tag{3}$$

Dies kann mit einer erweiterten Tabelle leicht bestimmt werden.

	A_i	$z_{si} = \|z_i - z_s\|$	z_{si}^2	$A_i z_{si}^2$	I_{i,y_i}
1	$10 \cdot b^2$	$\frac{6}{5}b$	$\frac{36}{25}b^2$	$\frac{360}{25}b^4$	$\frac{10}{12}b^4$
2	$18 \cdot b^2$	$\frac{4}{5}b$	$\frac{16}{25}b^2$	$\frac{288}{25}b^4$	$\frac{162}{12}b^4$
3	$-8 \cdot b^2$	$\frac{3}{10}b$	$\frac{9}{100}b^2$	$-\frac{18}{25}b^4$	$-\frac{32}{12}b^4$
$\sum$				$\frac{126}{5}b^4$	$\frac{35}{3}b^4$

$$I_y = \frac{553}{15}b^4 \tag{4}$$

Aufgabe 122

r_i und r_a sind Innen- und Außenradius des Rohrs, A ist der Flächeninhalt des Querschnitts.
Alternativ zur (recht einfachen) Berechnung des Flächenträgheitsmoments mit Hilfe der Polarkoordinaten sei hier das Vorgehen in karthesischen Koordinaten (y, z) demonstriert.

$$I_{yy} = \int_A z^2 dA \overset{\text{Subst.}}{=} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} r^2 \sin^2\varphi \; r \; \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{5}$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r_i}^{r_a} \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi \tag{6}$$
$$= \frac{1}{4}\left(r_a^4 - r_i^4\right) \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi \tag{7}$$
$$= \frac{1}{4}\left(r_a^4 - r_i^4\right) \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} \tag{8}$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(r_a^4 - r_i^4\right) \tag{9}$$
$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left[(51\text{ cm})^4 - (49\text{ cm})^4\right] = 78{,}57\text{ dm}^4 \tag{10}$$

Zur Integration. Mit partieller Integration erhält man:

$$\int \sin^2 x \mathrm{d}x = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x \mathrm{d}x \tag{11}$$
$$= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x)\mathrm{d}x \tag{12}$$
$$2\int \sin^2 x \mathrm{d}x = -\cos x \sin x + \int dx + \tilde{C} \tag{13}$$
$$\int \sin^2 x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{x}{2} + C \tag{14}$$

…und mit Additionstheorem:

$$= -\frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2} + C \tag{15}$$

Oder gleich mit Additionstheorem:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C \tag{17}$$

Wegen der Symmetrie ist das Flächenträgheitsmoment bezüglich jeder Achse, die durch den Mittelpunkt geht, unabhängig vom Winkel gleich I_{yy}. (z.B. $I_{zz} = I_{yy}$.)

Aus dem Satz von Steiner ergibt sich für die um e aus dem Flächenmittelpunkt verschobene Achse η:

$$I_{\eta\eta} = I_{yy} + Ae^2 = \frac{\pi}{4}\left(r_a^4 - r_i^4\right) + \pi\left(r_a^2 - r_i^2\right)e^2 \tag{18}$$
$$= 103{,}70\text{ dm}^4 = 0{,}01\text{ m}^4 \tag{19}$$

Hausaufgaben

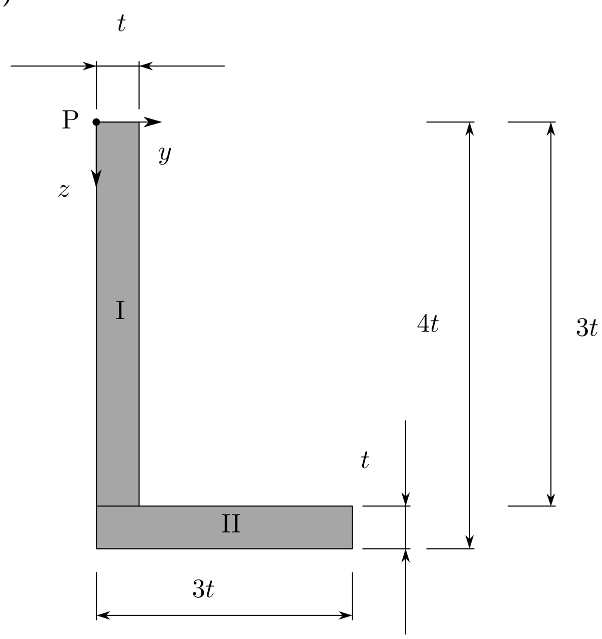
Aufgabe 121

Bei beiden Systemen wird zur Bestimmung des Flächenträgheitssystems analog vorgegangen. Das jeweilige System wird in Teilsysteme (hier Rechtecke und Kreise) mit bekannten Eigenflächenträgheitsmomenten zerlegt. Von dem Gesamtsystem wird der Gesamtschwerpunkt berechnet. Dann werden in Tabellen die jeweiligen relevanten Werte eingetragen. Das sind:

- Fläche des Teilsystems A_i
- Abstand der Gesamtschwerpunktsachse um die das FTM gebildet werden soll zu der lokalen Schwerpunktachse des Teilsystems a_i in y-Richtung bzw. b_i in z-Richtung
- Steineranteil $+a_i^2 A_i$, $+b_i^2 A_i$ bzw. $-a_i b_i A_i$
- Eigenflächenträgheitsmomente I_{yy}^*, I_{zz}^* bzw. I_{yz}^* (FTM um lokale Schwerpunktachsen; hier als bekannt für die einfachen Teilsysteme vorrausgesetzt)

Danach werden die Steineranteile und die Eigen-FTM addiert, um das Gesamt-FTM zu bestimmen.

(a)



Ermittlung des Schwerpunktes des Gesamtsystems:

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} \tag{20}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}t \cdot 3t^2 + \frac{3}{2}t \cdot 3t^2}{3t^2 + 3t^2} \tag{21}$$

$$= t \tag{22}$$

$$z_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} z_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} \tag{23}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}t \cdot 3t^2 + \frac{7}{2}t \cdot 3t^2}{3t^2 + 3t^2} \tag{24}$$

$$= \frac{5}{2}t \tag{25}$$

Schwerpunkt des Gesamtsystems liegt bei $S = \left(t; \frac{5}{2}t\right)$.
Berechnung von I_{yy}:

Teilkörper	A_i	$b_i = z_{Si} - z_S$	$b_i^2 A_i$	I_{yy}^*
I	$3t^2$	t	$3t^4$	$\frac{9}{4}t^4$
II	$3t^2$	t	$3t^4$	$\frac{1}{4}t^4$
$\sum$	/	–	$6t^4$	$\frac{5}{2}t^4$

$$\Rightarrow \quad I_{yy} = \sum a_i^2 A_i + \sum I_{yy}^* \tag{26}$$

$$= \underline{\underline{\frac{17}{2}t^4}} \tag{27}$$

Berechnung von I_{zz}:

Teilkörper	A_i	$a_i = y_{Si} - y_S$	$a_i^2 Ai$	I_{zz}^*
I	$3t^2$	$\frac{t}{2}$	$\frac{3}{4}t^4$	$\frac{1}{4}t^4$
II	$3t^2$	$\frac{t}{2}$	$\frac{3}{4}t^4$	$\frac{9}{4}t^4$
$\sum$	/	–	$\frac{3}{2}t^4$	$\frac{5}{2}t^4$

$$\Rightarrow \quad I_{zz} = \sum b_i^2 A_i + \sum I_{zz}^* \tag{28}$$

$$= \underline{\underline{4t^4}} \tag{29}$$

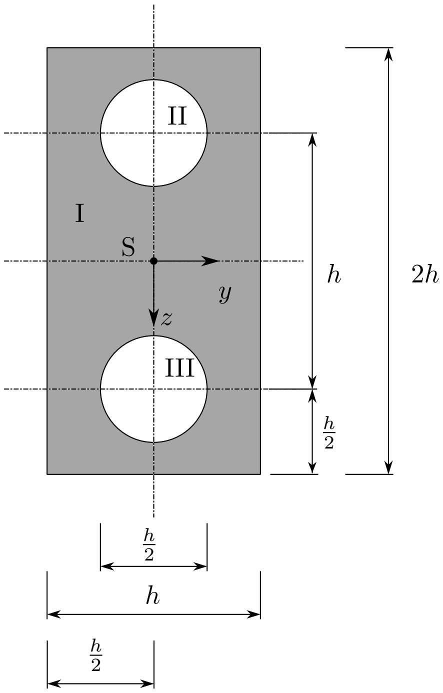
Berechnung von I_{yz} (Deviationsmoment):

Teilkörper	A_i	a_i	$b_i = z_{Si} - z_S$	$a_i b_i A_i$	I_{yz}^*
I	$3t^2$	$\frac{t}{2}$	t	$\frac{3}{2}t^4$	0
II	$3t^2$	$\frac{t}{2}$	t	$\frac{3}{2}t^4$	0
$\sum$	/	–	–	$3t^4$	0

$$\Rightarrow \quad I_{yz} = -\sum a_i b_i A_i + \sum I_{yz}^* \tag{30}$$

$$= \underline{\underline{-3t^4}} \tag{31}$$

(b)



Hier werden von dem kompletten Rechteck (I) die beiden Flächenträgheitsmomente der Kreise (II) und (III) abgezogen:

$$I_{\text{ges}} = I_I - I_{II} - I_{III} \tag{32}$$

Berechnung von I_{yy}:

Teilkörper	A_i	$b_i = z_{Si} - z_S$	$b_i^2 Ai$	I_{yy}^*
I	$2h^2$	0	0	$\frac{2}{3}h^4$
II	$-\frac{\pi h^2}{16}$	$-\frac{h}{2}$	$-\frac{\pi h^4}{64}$	$-\frac{\pi h^4}{1024}$
III	$-\frac{\pi h^2}{16}$	$\frac{h}{2}$	$-\frac{\pi h^4}{64}$	$-\frac{\pi h^4}{1024}$
I-II-III	/	–	$-\frac{\pi h^4}{32}$	$\left(\frac{512-3\pi}{1536}\right)h^4$

$$\Rightarrow \quad I_{yy} = \sum b_i^2 A_i + \sum I_{yy}^* \tag{33}$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{1024-51\pi}{1536}\right)h^4}} \tag{34}$$

Berechnung von I_{zz}:

Teilkörper	A_i	$a_i = y_{Si} - y_S$	$a_i^2 Ai$	I_{zz}^*
I	$2h^2$	0	0	$\frac{1}{6}h^4$
II	$-\frac{\pi h^2}{16}$	0	0	$\frac{-\pi h^4}{1024}$
III	$-\frac{\pi h^2}{16}$	0	0	$\frac{-\pi h^4}{1024}$
I-II-III	/	–	0	$\left(\frac{256-3\pi}{1536}\right)h^4$

$$\Rightarrow \quad I_{zz} = \sum a_i^2 A_i + \sum I_{zz}^* \tag{35}$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{256-3\pi}{1536}\right)h^4}} \tag{36}$$

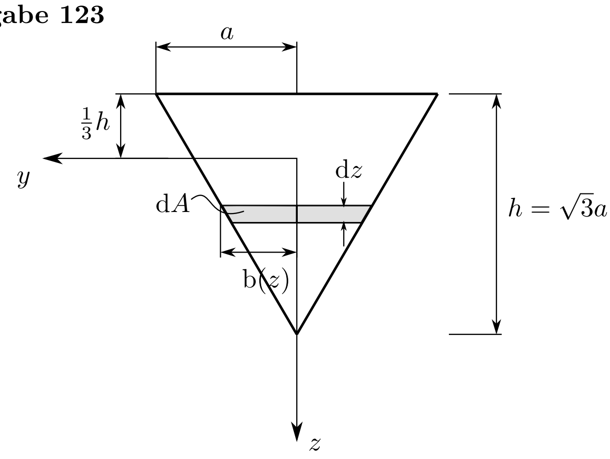
Berechnung von I_{yz}:

Teilkörper	A_i	$a_i = y_{Si} - y_S$	$b_i = z_{Si} - z_S$	$a_i b_i Ai$	I_{yz}^*
I	$2h^2$	0	0	0	0
II	$-\frac{\pi h^2}{16}$	0	$-\frac{h}{2}$	0	0
III	$-\frac{\pi h^2}{16}$	0	$\frac{h}{2}$	0	0
I-II-III	/	0	–	0	0

$$\Rightarrow \quad I_{yz} = \sum -a_i b_i A_i + \sum I_{yz}^* = \underline{\underline{0}} \tag{37}$$

Merke: Das Deviationsmoment bezüglich der Symmetrieachsen verschwindet immer.

Aufgabe 123



$$I_y = \int_{-\frac{1}{3}h}^{\frac{2}{3}h} z^2 \,\mathrm{d}A \tag{38}$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} z^2 2\,\mathrm{b}(z)\mathrm{d}z \tag{39}$$

$\mathrm{b}(z)$ ist als Geradengleichung der Dreieckskante aufzufassen:

$$\mathrm{b}(z) = -\frac{1}{\sqrt{3}}z + \frac{2}{3}a\,. \tag{40}$$

Damit ergibt sich für I_y:

$$I_y = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} z^2(-\frac{1}{\sqrt{3}}z + \frac{2}{3}a)\,\mathrm{d}z \tag{41}$$

$$= 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} (-\frac{1}{\sqrt{3}}z^3 + \frac{2}{3}az^2)\,\mathrm{d}z \tag{42}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}}z^4 + \frac{2}{9}az^3\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} \tag{43}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{16}{9}a^4 + \frac{2}{9}\frac{8}{3\sqrt{3}}a^4 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{1}{9}a^4 + \frac{2}{9}\frac{1}{3\sqrt{3}}a^4\right] \tag{44}$$

$$= 2a^4\left[-\frac{15}{4\sqrt{3}\,9} + \frac{18}{3\sqrt{3}\,9}\right] = \left[-\frac{5}{6} + \frac{4}{3}\right]\frac{a^4}{\sqrt{3}} \tag{45}$$

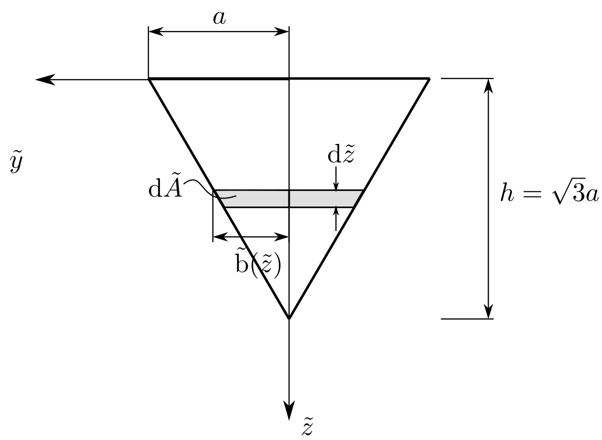
$$I_y = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a^4 \tag{46}$$

Um die Integration zu vereinfachen kann die Aufgabe auch mit Hilfe des Steinerschen Satzes gelößt werden. Es gilt:

$$I_{\tilde{y}} = I_y + \tilde{z}_s^2 A \tag{47}$$

$$\Rightarrow I_y = I_{\tilde{y}} - \tilde{z}_s^2 A \tag{48}$$

wobei $\tilde{z}_s = \frac{1}{\sqrt{3}}a$ ist und $A = \sqrt{3}\,a^2$ ist.



$\tilde{\mathrm{b}}(\tilde{z}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} + a$ und für $\mathrm{d}\tilde{A}$ gilt $\mathrm{d}\tilde{A} = 2\,\tilde{\mathrm{b}}(\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z}$. Damit ergibt sich für $I_{\tilde{y}}$:

$$I_{\tilde{y}} = \int_0^{\sqrt{3}a} \tilde{z}^2 2\tilde{\mathrm{b}}(\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z} \tag{49}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}a} \tilde{z}^2(-\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} + a)\,\mathrm{d}\tilde{z} \tag{50}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}a} (-\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z}^3 + a\tilde{z}^2)\,\mathrm{d}\tilde{z} \tag{51}$$

$$= 2\left[-\frac{1}{4\sqrt{3}}\tilde{z}^4 + \frac{1}{3}a\tilde{z}^3\right]_0^{\sqrt{3}a} \tag{52}$$

$$= -\frac{1}{2}3\sqrt{3}a^4 + \frac{4\sqrt{3}}{2}a^4 \tag{53}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^4\,. \tag{54}$$

Schließlich ergibt sich für I_y:

$$I_y = \frac{1}{2}\sqrt{3}a^4 - \frac{1}{3}\sqrt{3}a^4 \tag{55}$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a^4 \tag{56}$$