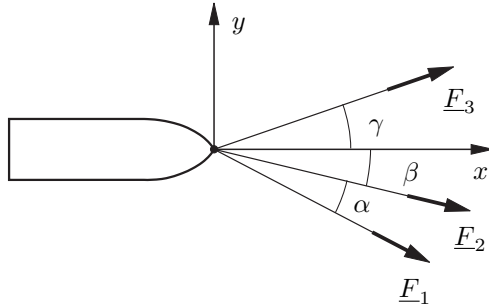


Tutorium

Aufgabe 3

Der Vektor der resultierenden Zugkraft \underline{F}_{res} ist gleich der Summe der Vektoren der einzelnen Zugkräfte.



$$\underline{F}_{res} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \quad (1)$$

Die x - und y -Komponenten der Einzelkräfte berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} F_{1,x} &= F \cos(\alpha + \beta) & F_{1,y} &= -F \sin(\alpha + \beta) \\ F_{2,x} &= F \cos \beta & F_{2,y} &= -F \sin \beta \\ F_{3,x} &= F \cos \gamma & F_{3,y} &= F \sin \gamma \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (1):

$$\begin{aligned} \underline{F}_{res} &= \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \\ &= (F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x})\underline{e}_x + (F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y})\underline{e}_y \\ &= F(\cos(\alpha + \beta) + \cos \beta + \cos \gamma)\underline{e}_x \\ &\quad + F(-\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta + \sin \gamma)\underline{e}_y \\ &\approx 56,616\text{kN} \underline{e}_x - 5,085\text{kN} \underline{e}_y \end{aligned}$$

Die resultierende Kraft aller drei Schlepper ist der Betrag dieses Vektors:

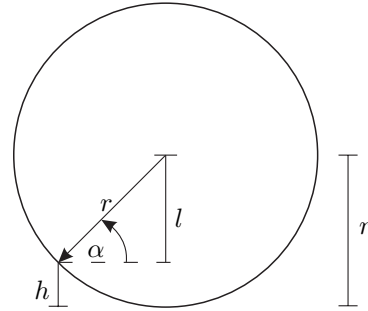
$$\begin{aligned} F_{res} &= |\underline{F}_{res}| = \sqrt{F_{res,x}^2 + F_{res,y}^2} \\ &\approx 56,844\text{kN} \end{aligned}$$

Der Winkel δ , den die resultierende Kraft F_{res} mit der x -Achse einschließt ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{F_{res,y}}{F_{res,x}} \\ \delta &= \arctan\left(\frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}\right) \\ &\approx -5,1^\circ \end{aligned} \quad (2) \quad (3)$$

Aufgabe 10

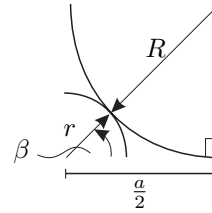
(a) Winkel α bestimmen:



$$l = r - h \quad (4)$$

$$\sin \alpha = \frac{l}{r} = \frac{r - h}{r} \quad (5)$$

Winkel β bestimmen:

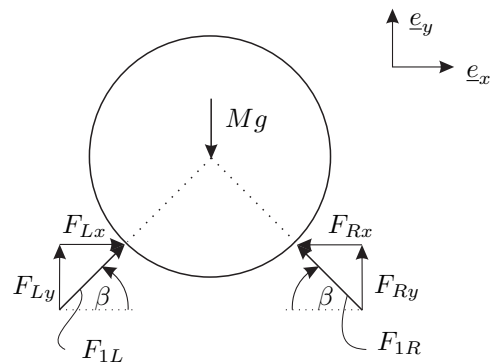


$$\cos \beta = \frac{\frac{a}{2}}{r + R} \quad (6)$$

(b) Bestimmen der Kontaktkräfte:

Kontakte sind glatt \Rightarrow Kräfte werden nur in Normalenrichtung übertragen.

Freischnitt der oberen Walze:



$$\vec{F}_{1L} = \cos \beta F_{1L} \underline{e}_x + \sin \beta F_{1L} \underline{e}_y \quad (7)$$

Analog dazu berechnet sich \vec{F}_{1R} . Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_x = F_{1L} \cos \beta - F_{1R} \cos \beta \stackrel{!}{=} 0 \quad (8)$$

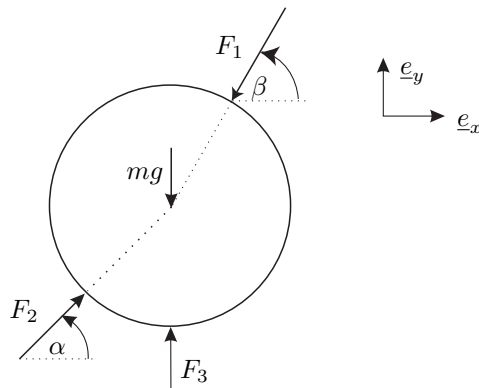
$$\Rightarrow F_{1L} = F_{1R} =: F_1 \quad (9)$$

Dieses ist auch aus der Symmetrie des Systems ersichtlich.

$$\sum F_y = -Mg + 2F_1 \sin \beta \stackrel{!}{=} 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{Mg}{2 \sin \beta} \quad (11)$$

Freischnitt der unteren linken Walze:



Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_x = F_2 \cos \alpha - F_1 \cos \beta \stackrel{!}{=} 0 \quad (12)$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} F_1 \stackrel{!}{=} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \frac{Mg}{2 \sin \beta} \quad (13)$$

$$\sum F_y = -mg + F_3 - F_1 \sin \beta + F_2 \sin \alpha \stackrel{!}{=} 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_3 &= mg + \left[\sin \beta - \sin \alpha \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right] F_1 \\ &= mg + \frac{Mg}{2} \left[1 - \frac{\cos \beta \sin \alpha}{\sin \beta \cos \alpha} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Analog dazu lassen sich die Kräfte der rechten Walze berechnen. (Symmetrie!)

Hausaufgaben

Aufgabe 2

ges.: $|\vec{F}_{res}|$ und Richtung rechnerisch und zeichnerisch

rechnerisch:

Darstellung der Kräfte F_1, F_2 als Vektoren:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cos \alpha \underline{e}_x + F_1 \sin \alpha \underline{e}_y = \begin{pmatrix} F_1 \cos \alpha \\ F_1 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \cos \beta \underline{e}_x + F_2 \sin \beta \underline{e}_y = \begin{pmatrix} F_2 \cos \beta \\ F_2 \sin \beta \end{pmatrix}$$

Berechnung der Resultierenden aus vektorieller Summe:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{res} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ &= (F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta) \underline{e}_x + (F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta) \underline{e}_y \\ &= \begin{pmatrix} F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta \\ F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 3,23 \\ 2,596 \end{pmatrix} \text{ kN} = 3,23 \text{ kN} \underline{e}_x + 2,596 \text{ kN} \underline{e}_y \\ &= \begin{pmatrix} F_{res,x} \\ F_{res,y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Betrag: $|\vec{F}_{res}| = \sqrt{F_{res,x}^2 + F_{res,y}^2} \approx 4,144 \text{ kN}$

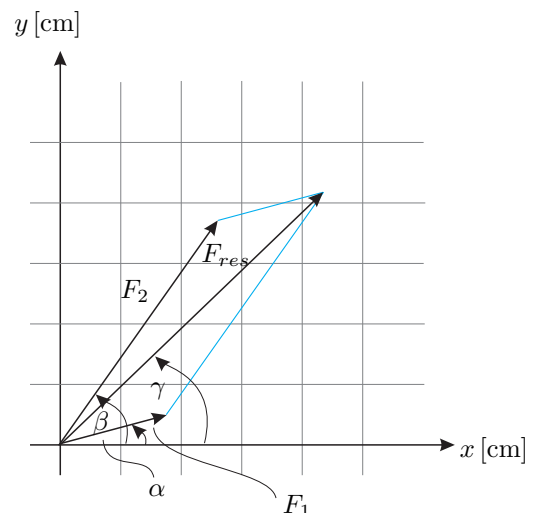
Richtung:

$$\tan \gamma = \frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arctan \left(\frac{F_{res,y}}{F_{res,x}} \right) \approx 38,79^\circ$$

zeichnerisch:

Zeichnung mit Maßstab $\frac{1 \text{ kN}}{1 \text{ cm}}$



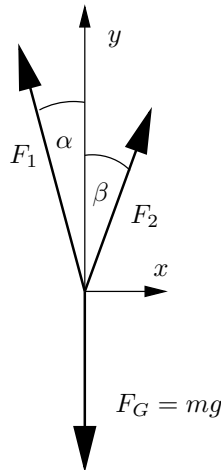
Ablezen liefert:

$$F_{res} \hat{=} 4,14 \text{ cm} \Rightarrow F_{res} = 4,14 \text{ kN} \\ \gamma \approx 39^\circ$$

Aufgabe 4

(a) Da die Kiste in Ruhe ist, muss Kräftegleichgewicht herrschen, d.h. die (vektorielle) Summe aller Kräfte muss Null sein.

$$\underline{0} = -F_1 \sin \alpha \underline{e}_x + F_1 \cos \alpha \underline{e}_y + F_2 \sin \beta \underline{e}_x + F_2 \cos \beta \underline{e}_y - F_G \underline{e}_y$$



Für den Gleichgewichtszustand müssen also die beiden skalaren Gleichungen

$$0 = -F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta \tag{16}$$

$$0 = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta - F_G \tag{17}$$

gelten. Anschaulich kann man auch so argumentieren: die resultierende Kraft F_{res} der beiden Kräfte F_1 und F_2 muss genau senkrecht wirken, damit die Kiste ruhig hängt. Deshalb müssen sich die Kraftkomponenten in x -Richtung genau aufheben.

Man erhält

$$F_1 = F_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \approx 6,607 \text{ kN} \tag{18}$$

(Zur Information: Der Betrag der resultierenden Kraft F_{res} ist (in diesem speziellen Fall) gleich der Summe der y -Komponenten $F_{1,y}$ und $F_{2,y}$ der Kräfte F_1 und F_2 :

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= \sqrt{F_{\text{res},x}^2 + F_{\text{res},y}^2} \\ &= F_{1,y} + F_{2,y} \\ &= F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta = F_2 \left(\sin \beta \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos \beta \right) \\ &= F_2 (\sin \beta \cot \alpha + \cos \beta) \approx 11,081 \text{ kN} \end{aligned}$$

(b) Aus (17) folgt für die Gewichtskraft

$$F_G = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta$$

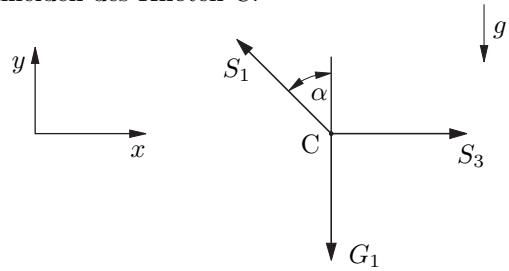
Daraus ergibt sich die Masse zu

$$m = \frac{F_G}{g} \approx 1130 \text{ kg}$$

Aufgabe 8

Bestimmung der Kräfte in den Stäben

Freischneiden des Knoten C:



Kräftegleichgewicht in x -Richtung

$$\sum F_x = 0 = -S_1 \sin \alpha + S_3 \tag{19}$$

Kräftegleichgewicht in y -Richtung

$$\sum F_y = 0 = S_1 \cos \alpha - G_1 \tag{20}$$

Auflösen nach S_1 und S_3

$$S_1 = \frac{G_1}{\cos \alpha} = \frac{G}{\cos \alpha} = \sqrt{2}G$$

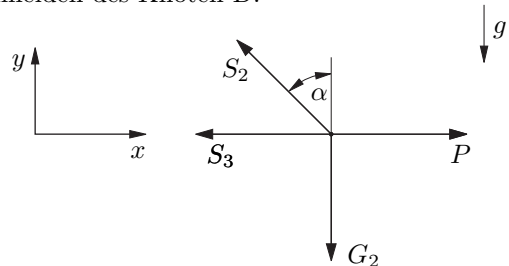
$$S_1 \approx 141 \text{ N}$$

$$S_3 = S_1 \sin \alpha = G \tan \alpha = G$$

$$S_3 = 100 \text{ N}$$

S_1 und S_3 sind positiv, d.h. die Kräfte wirken in die eingezeichnete Richtung, demnach sind die Stäbe 1 und 3 auf Zug belastet.

Freischneiden des Knoten D:



Kräftegleichgewicht (in vektorieller Form)

$$\sum \underline{F} = \underline{0} = \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{G}_2 + \underline{P} \tag{21}$$

Darstellung der Kräfte in der Basis $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$.

$$\underline{S}_2 = \begin{pmatrix} -S_2 \sin \alpha \\ S_2 \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \underline{S}_3 = \begin{pmatrix} -S_3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\underline{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2G \end{pmatrix} \quad \underline{P} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} -S_2 \sin \alpha \\ S_2 \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -S_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und den gegebenen Werten:

$$S_2 = 2\sqrt{2}G \approx 282 \text{ N}$$

$$P = 3G = 300 \text{ N}$$

Auch der Stab 2 ist auf Zug belastet.

Hinweis: Beim Knoten C wurden direkt die skalaren Gleichungen angeschrieben. In der Ebene sind dies zwei Gleichungen je Knoten. Beim Knoten D hingegen wurde das Kräftegleichgewicht vektoriell notiert.

Viele empfinden die „skalare Schreibweise“ bei ebenen Problemen als vorteilhaft. Bei räumlichen Problemen kommt man jedoch um die vektorielle Schreibweise kaum herum.