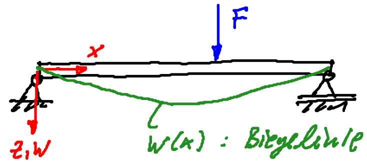
11. Plenarübung

Themen:
- Lösung statisch unbestimmter Systeme unter Biegebeanspruchung
- Berechnung der Biegelinie (Balkenachse im deformierten Zustand)

Bsp. 1



Wie kann man die Biegelinie ermitteln?

Bei statisch bestimmten Systemen

- Wir berechnen zunächst das Biegemoment $M_y(x)$ [entweder mit dem Globalschnitt-verfahren oder den Schnittlastendgln.]
- Wir setzen $M_y(x)$ in das Material-Struktur-Gesetz ein!

MSG (Biegung): $M_y(x) = -E I_y(x)\, w''(x)$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{w''(x) = \frac{M_y(x)}{-E I_y(x)}} \qquad (1)$$

Biegelinienedgl. 2. Ordnung

- Zweimalige Integration liefert die Biegelinie $w(x)$. Die Integrationskonstanten werden aus geometrischen Randbedingungen und Übergangsbedingungen ermittelt!

  Geometrische Bedingungen sind Bedingungen an die Durchsenkung w des Balkens und die Neigung w' (= Biegewinkel).

- Alternativ kann die Biegelinie auch über Glg. (6) ermittelt werden. $M_y(x)$ und $Q(x)$ werden automatisch mitgeliefert.

Bei statisch unbestimmten Systemen

- Problem: Wir können $M_y(x)$ nicht aus dem Globalschnittverfahren oder den Schnittlastendgln ermitteln
- Idee: Wir koppeln die Schnittlasten-dgln. mit dem Material-Struktur-Gesetz!

zur Erinnerung:
$$Q'(x) = -q(x) \qquad (2)$$
$$M_y'(x) = Q(x) \qquad (3) \quad // (\cdot)'$$

aus (2) und (3) $\Rightarrow$ $M_y''(x) = -q(x)$ (4)

Einsetzen von (1) in (4) $\Rightarrow$

$$\left[-E I_y(x)\, w''(x)\right]'' = -q(x)$$

$$\boxed{\left(E I_y(x)\, w''(x)\right)'' = q(x)} \qquad (5)$$

Biegelinienedgl. 4. Ordnung!

- Sonderfall (zumeist bei uns gegeben): Konstante Biegesteifigkeit $E I_y(x) = \text{const.}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E I_y\, w^{IV}(x) = q(x)} \qquad (6)$$

- Viermalige Integration liefert $w(x)$. Die Integrationskonstanten werden aus geometrischen (w, w') und dynamischen (M, Q) Rand- und Übergangsbedingungen ermittelt!

• Achtung: Ist $w(x)$ ermittelt, sind automatisch auch $M_y(x)$ und $Q(x)$ für das statisch unbestimmte System bekannt, denn es gelten:

$$M_y(x) = -EI_y w''(x) \qquad EI_y = \text{const}$$

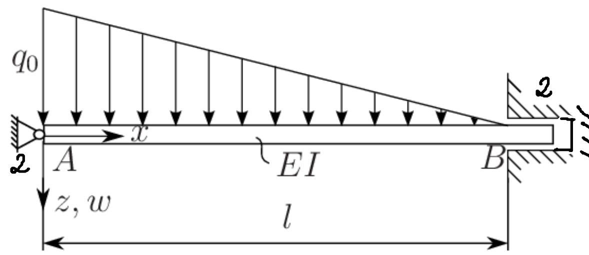
$$Q(x) = [-EI_y w''(x)]' = -EI_y w'''(x)$$

103. Ein Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI) ist wie skizziert gelagert und belastet. (Bei A gelenkig aber nicht verschieblich)

(a) Bestimmen Sie die Biegelinie mit Hilfe der Biegeliniendifferentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Auflagerkraft im Gelenk A.

(c) An welcher Stelle tritt das maximale Biegemoment auf?



Geg.: l, q_0 , EI

Vorüberlegung: Es liegt ein einfach statisch unbestimmtes System vor!

(a) Gesucht: Biegelinie $w(x)$

Biegeliniendgl. 4. Ordnung: $\quad EI\, w^{IV}(x) = q(x) \qquad (1)$

benötigt wird $q(x)$: $\quad q(x) = -\frac{q_0}{l}x + q_0 \qquad (2)$

(2) in (1) $\Rightarrow \quad EI\, w^{IV}(x) = -\frac{q_0}{l}(x-l) \qquad (3)$

Viermalige Integration:

$$EI\, w'''(x) = -\frac{q_0}{l}\frac{1}{2}(x-l)^2 + C_1$$

$$EI\, w''(x) = -\frac{q_0}{l}\frac{1}{6}(x-l)^3 + C_1 \cdot x + C_2 \qquad (4)$$

$$EI\, w'(x) = -\frac{q_0}{l}\frac{1}{24}(x-l)^4 + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI\, w(x) = -\frac{q_0}{l}\frac{1}{120}(x-l)^5 + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Bestimmung der Integrationskonstanten aus geometr. und dynamischen Randbedingungen:

I $\quad w(0) = 0 \Rightarrow -\frac{q_0}{l}\frac{1}{120}(0-l)^5 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -\frac{q_0 l^4}{120}$

II $\quad M(0) = 0 \Rightarrow -EI\, w''(0) = 0 \Rightarrow -\frac{q_0}{l}\frac{1}{6}(0-l)^3 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{q_0 l^2}{6}$

III $\quad w(l) = 0 \Rightarrow C_1 \frac{l^3}{6} + C_2 \frac{l^2}{2} + C_3 l + C_4 = 0$

IV $\quad w'(l) = 0 \Rightarrow C_1 \frac{l^2}{2} + C_2 \cdot l + C_3 = 0 \quad // \cdot l$ $\quad$ – $\quad (5)$

$$\frac{C_1 l^3}{6} + C_2\frac{l^2}{2} + \cancel{C_3 l} + C_4 - C_1\frac{l^3}{2} - C_2 l^2 - \cancel{C_3 l} = 0$$

$$-C_1\frac{l^3}{3} - C_2\frac{l^2}{2} + C_4 = 0 \Rightarrow \quad C_1\frac{l^3}{3} = C_4 - C_2\frac{l^2}{2} = -\frac{q_0 l^4}{120} + \frac{q_0 l^4}{12}$$

$$C_1\frac{l^3}{3} = \frac{3}{40} q_0 l^4 \quad // \cdot \frac{3}{l^3}$$

$$\underline{\underline{C_1 = \frac{9}{40} q_0 l}} \quad (6)$$

$$(6) \text{ in } (5) \Rightarrow \quad \frac{9}{40} q_0 l \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{q_0 l^3}{6} + C_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_3 = \frac{13}{240} q_0 l^3}}$$

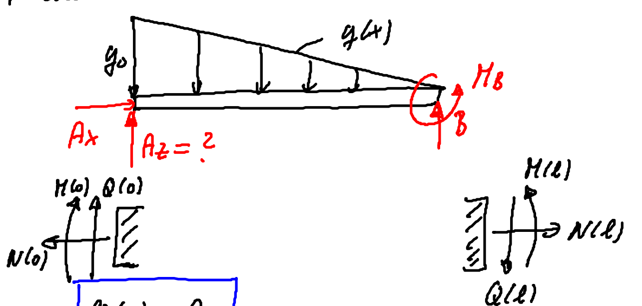
Einsetzen der Konstanten:

$$EI\, w(x) = -\frac{q_0}{l}\frac{1}{120}(x-l)^5 + \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{40} q_0 l \cdot \frac{x^3}{\cancel{6}_2} - \frac{q_0 l^2}{12}x^2 + \frac{13}{240} q_0 l^3 x - \frac{q_0 l^4}{120}$$

$$EI\, w(x) = -\frac{q_0 l^4}{120}\left(\frac{x}{l}-1\right)^5 + \frac{3 q_0 l^4}{80}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{q_0 l^4}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{13 q_0 l^4}{240}\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{q_0 l^4}{120} \quad // : EI$$

$$w(x) = -\frac{q_0 l^4}{120 EI}\left[\left(\frac{x}{l}-1\right)^5 - \frac{9}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 10\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{13}{2}\left(\frac{x}{l}\right) + 1\right]$$

(b) Gesucht: Vertikale Lagerlast im Punkt A:



$\Rightarrow Q(l) = -B$

$M(l) = M_B$

$\boxed{Q(0) = A_z}$

$$A_z = Q(0) = -EI\, w'''(0) = +\frac{q_0}{l}\frac{1}{2}(0-l)^2 - \frac{9}{40} q_0 l = \frac{1}{2} q_0 l - \frac{9}{40} q_0 l = \underline{\frac{11}{40} q_0 l}$$

(c) Gesucht: Betragsmäßig maximales Biegemoment

M(x) auf relative Extrema prüfen und mit Randwerten vergleichen!

Relative Extrema von M(x):

Forderung: $M'(x) = 0 \Leftrightarrow Q(x) = 0$:

$$Q(x) = \frac{q_0}{l}\frac{1}{2}(x-l)^2 - \frac{9}{40} q_0 l \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \quad (x-l)^2 = \frac{9}{20} l^2 \quad // \sqrt{\ }$$

$$|x-l| = \frac{3}{\sqrt{20}} l \qquad 0 \le x \le l$$

$$-(x-l) = \frac{3}{\sqrt{20}} l$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \left(1-\frac{3}{\sqrt{20}}\right) l}} \approx \underline{\underline{0{,}33\, l}}$$

Überprüfung $M''(0{,}33l) \neq 0$ erfüllt, denn M''(0,33l)=-q(0,33l) und das ist kleiner 0.

$$M\left(\left(1-\frac{3}{\sqrt{20}}\right)l\right) = -EI\, w''\left(\left(1-\frac{3}{\sqrt{20}}\right)l\right) = \dots = \frac{q_0 l^2}{120}\left(\frac{27}{\sqrt{5}} - 7\right) \approx \underline{\underline{\frac{5{,}07}{120}}} q_0 l^2$$

Randwerte: $M(0) = 0$; $M(l) = -EI\, w''(l) = \dots = \underline{\underline{-\frac{7}{120} q_0 l^2}}$

$\Rightarrow$ Bei $x = l$ tritt das betragsmäßig größte Biegemoment auf: $\max\{|M(x)|\} = |M(l)| = \frac{7}{120} q_0 l$

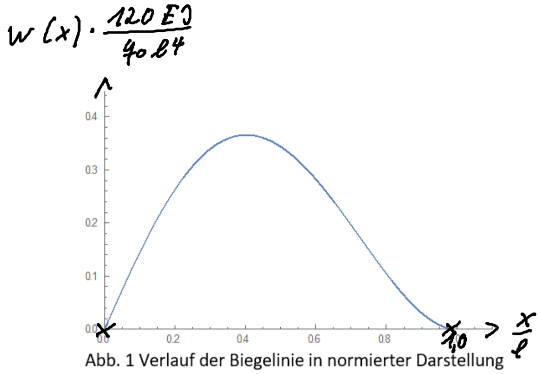


Abb. 1 Verlauf der Biegelinie in normierter Darstellung

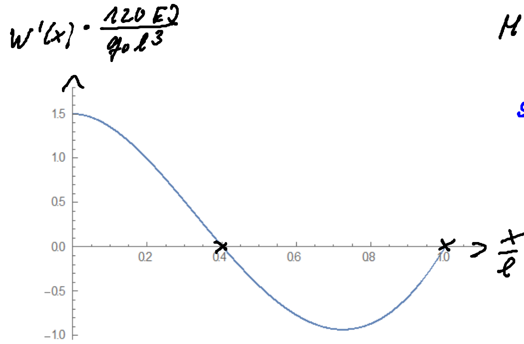


Abb. 2 Verlauf des Biegewinkels in normierter Darstellung

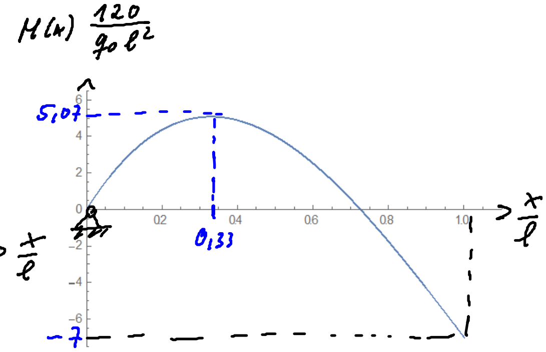


Abb. 3 Verlauf des Biegemomentes in normierter Darstellung