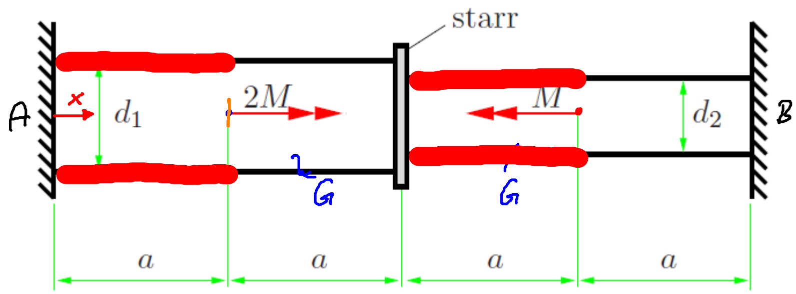
10. Plenarübung

Thema: Torsion – nur für die „Besten"!

96. Dargestellt ist ein durch zwei äußere Drehmomente belasteter zusammengesetzter zylindrischer Stab aus elastischem Material mit dem Schubmodul G.



$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Bestimmen Sie $\xi = d_1/d_2$ so, dass links und rechts der starren Scheibe betragsmäßig dieselben maximalen Spannungen auftreten. Achtung: Mit links und rechts der starren Scheibe sind die gesamten Bereiche $0 \le x < 2a$ und $2a < x \le 4a$ gemeint!

Zur Erinnerung: $\tau(x,r) = \dfrac{M_T(x)}{J_p(x)}\, r$

Material-Struktur-Glg: $M_T(x) = G\, J_p(x) \cdot \vartheta'(x)$

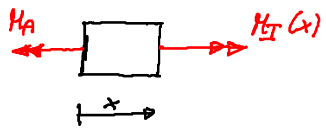
Offensichtlich wird τ betragsmäßig maximal für $r = \frac{d}{2}$ ← Durchmesser des Wellenabschnittes
und an der Stelle des betragsmäßig maximalen Torsionsmomentes (denn J_p ist abschnittsweise konstant)

1.) Berechnung der Torsionsschnittmomente

Problem: Das System ist einfach statisch unbestimmt – aus dem einen GGB am Gesamtsystem $\Sigma M_x = 0$ können nicht beide Torsionseinspannmomente ermittelt werden!

Idee: Wir berechnen zunächst alle Schnittmomente in Abhängigkeit von M_A

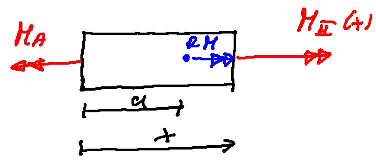
I. $0 \le x < a$



$$\sum M_x^{(S)} = 0 \Rightarrow M_I(x) - M_A = 0$$

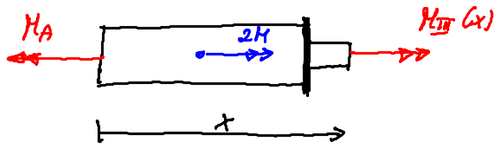
$$\underline{M_I(x) = M_A} \quad (1)$$

II. $a \le x < 2a$



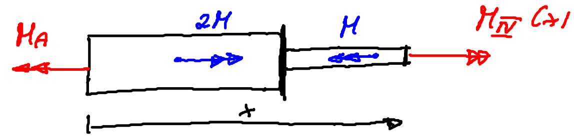
$$\sum M_x^{(S)} = 0 \Rightarrow \underline{M_{II}(x) = M_A - 2M} \quad (2)$$

III. $2a \le x < 3a$



$$\sum M_x^{(S)} = 0 \Rightarrow \underline{M_{III}(x) = M_A - 2M} \quad (3)$$

IV. $3a \le x \le 4a$



$$\sum M_x^{(S)} = 0 \Rightarrow M_{IV}(x) - M + 2M - M_A = 0$$

$$\underline{M_{IV}(x) = M_A - M} \quad (4)$$

2.) Material-Schnittlast-Glgn

$$M_I(x) = G J_{p_1}(x)\, \vartheta_I'(x) \Leftrightarrow \vartheta_I'(x) = \frac{M_I(x)}{G J_{p_1}}$$

$$M_{II}(x) = G J_{p1}\, \vartheta_{II}'(x)$$

$$M_{III}(x) = G J_{p2}\, \vartheta_{III}'(x)$$

$$M_{IV}(x) = G J_{p2}\, \vartheta_{IV}'(x)$$

Abk.: $J_{p_1} := J_{p_I} = J_{p_{II}}$

$J_{p_2} := J_{p_{III}} = J_{p_{IV}}$

3.) Integration der Material-Schnittlast-Glg.

$$\vartheta_I'(x) = \frac{M_I(x)}{G J_{p1}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \vartheta_I'(x) = \frac{M_A}{G J_{p_1}} \Rightarrow \vartheta_I(x) = \frac{M_A}{G J_{p_1}} x + C_1$$

$$\vartheta_{II}'(x) = \frac{M_{II}(x)}{G J_{p_1}} \overset{(2)}{\Rightarrow} \vartheta_{II}'(x) = \frac{M_A - 2M}{G J_{p1}} \Rightarrow \vartheta_{II}(x) = \frac{M_A - 2M}{G J_{p1}} x + C_2$$

$$\vartheta_{III}'(x) = \frac{M_A - 2M}{G J_{p_2}} \Rightarrow \vartheta_{III}(x) = \frac{M_A - 2M}{G J_{p2}} x + C_3$$

$$\vartheta_{IV}'(x) = \frac{M_A - M}{G J_{p2}} \Rightarrow \vartheta_{IV}(x) = \frac{M_A - M}{G J_{p2}} x + C_4$$

4.) Bestimmung der Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3, C_4 und des Einspannmomentes M_A aus geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen:

a.) $\vartheta_I(0) = 0 \Rightarrow \underline{C_1 = 0}$

b.) $\vartheta_I(a) = \vartheta_{II}(a) \Rightarrow \frac{M_A}{G J_{p1}} a + 0 = \frac{M_A - 2M}{G J_{p1}} a + C_2 \Rightarrow \underline{C_2 = \frac{2M}{G J_{p1}} a}$

c.) $\vartheta_{II}(2a) = \vartheta_{III}(2a)$

d.) $\vartheta_{III}(3a) = \vartheta_{IV}(3a) \Rightarrow \frac{M_A - 2M}{G J_{p2}} \cdot 3a + C_3 = \frac{M_A - M}{G J_{p2}} \cdot 3a + \frac{M - M_A}{G J_{p2}} \cdot 4a$

e.) $\vartheta_{IV}(4a) = 0 \Rightarrow \frac{M_A - M}{G J_{p2}} \cdot 4a + C_4 = 0 \Rightarrow \underline{C_4 = \frac{M - M_A}{G J_{p2}} \cdot 4a}$

aus d.) folgt: $C_3 = \frac{-4M_A+7M}{G\,J_{p2}} \cdot a$

aus c.) folgt: $\frac{M_A-2M}{G\,J_{p1}} \cdot 2a + \frac{2M}{G\,J_{p1}} \cdot a = \frac{M_A-2M}{G\,J_{p2}} \cdot 2a + \frac{7M-4M_A}{G\,J_{p2}} \cdot a$

Abk.: $\eta := \frac{J_{p1}}{J_{p2}}$ ... wie man leicht sieht ...

$$M_A = M \cdot \frac{3\eta+2}{2(1+\eta)} \qquad (5)$$

Einsetzen von M_A in Glgn. (1) – (4):

$M_I(x) = M \cdot \frac{3\eta+2}{2(1+\eta)}$

$M_{II}(x) = M \cdot \frac{3\eta+2}{2(1+\eta)} - 2M \frac{2(1+\eta)}{2(1+\eta)} = M \cdot \frac{-\eta-2}{2(1+\eta)} = -M\frac{\eta+2}{2(1+\eta)} = M_{III}(x)$

$M_{IV}(x) = M\frac{3\eta+2}{2(1+\eta)} - M\frac{2(1+\eta)}{2(1+\eta)} = M\frac{\eta}{2(1+\eta)}$

Vgl. von $|M_I|$ und $|M_{II}|$ sowie $|M_{III}|$ und $|M_{IV}|$

$|M_I| > |M_{II}| \Rightarrow \max\{|\tau_I|\} > \max\{|\tau_{II}|\}$

$|M_{III}| > |M_{IV}| \Rightarrow \max\{|\tau_{III}|\} > \max\{|\tau_{IV}|\}$

Laut Aufgabenstellung ist gefordert: $\max\{|\tau_I|\} = \max\{|\tau_{III}|\}$

$$\max\left\{\frac{|M_I|}{J_{p1}} \cdot r\right\} = \max\left\{\frac{|M_{III}|}{J_{p2}} \cdot r\right\}$$

$$\frac{M\frac{3\eta+2}{2(1+\eta)}}{J_{p1}} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{M\frac{\eta+2}{2(1+\eta)}}{J_{p2}} \cdot \frac{d_2}{2}$$

$$\frac{3\eta+2}{J_{p1}} \cdot d_1 = \frac{\eta+2}{J_{p2}} d_2 \qquad // \cdot J_{p1} \,;\, : d_2$$

$$(3\eta+2) \cdot \frac{d_1}{d_2} = (\eta+2) \underbrace{\left(\frac{J_{p1}}{J_{p2}}\right)}_{=:\eta}$$

$$(3\eta+2) \cdot \frac{d_1}{d_2} = (\eta+2)\,\eta \qquad (6) \qquad \xi := \frac{d_1}{d_2}$$

WH: $J_{p\,Id} = \pi \frac{d^4}{32} \qquad [J_p] = m^4$

$$\eta := \frac{J_{p1}}{J_{p2}} = \frac{\pi \frac{d_1^4}{32}}{\pi \frac{d_2^4}{32}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 = \xi^4$$

aus (6) $\Rightarrow$ $(3\xi^4+2) \cdot \xi = (\xi^4+2) \cdot \xi^4 \qquad // : \xi$

$$3\xi^4 + 2 = \xi^7 + 2\xi^3$$

$$\xi^7 - 3\xi^4 + 2\xi^3 - 2 = 0 \qquad (7)$$

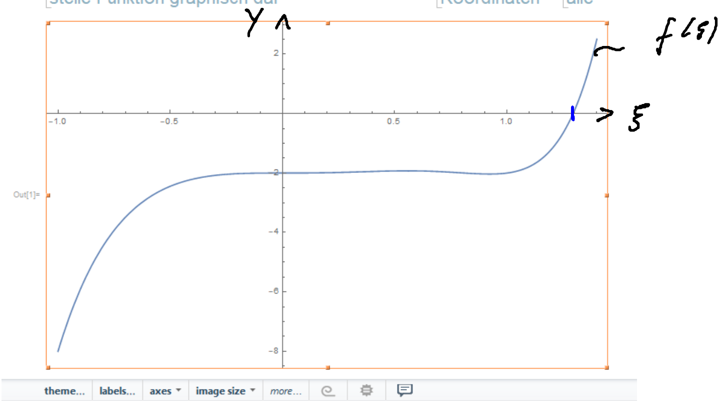
Gesucht sind die Nullstellen des Polynoms 7. Grades

$$f(\xi) = \xi^7 - 3\xi^4 + 2\xi^3 - 2$$

$\Rightarrow$ Garantiert eine reelle Nullstelle (vielleicht auch mehr) $\qquad \lim_{\xi \to \pm\infty} f(\xi) = \pm\infty$

```
In[1]:= Plot[ξ^7 - 3 ξ^4 + 2 ξ^3 - 2, {ξ, -1, 1.4}, PlotRange → All]
        stelle Funktion graphisch dar        Koordinaten···  alle
```

Out[1]=




```
In[2]:= NSolve[ξ^7 - 3 ξ^4 + 2 ξ^3 - 2 == 0, ξ, Reals]
        löse numerisch                      Menge r
Out[2]= {{ξ → 1.29417}}
```

Lösung nur numerisch möglich!

$$\boxed{\xi_1 = \frac{d_1}{d_2} \approx 1{,}294}$$