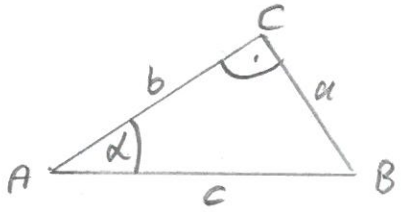
A. Mathematische Grundlagen

1.) Trigonometrie

Rechtwinkliges Dreieck:



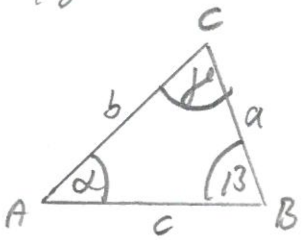
a : Gegenkathete $\quad \sin\alpha = \frac{a}{c}$

b : Ankathete $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$

c : Hypotenuse $\quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$

Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Schiefwinkliges Dreieck:



Sinussatz: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Charakteristische Werte für Sinus, Cosinus, Tangens

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$0 \hat{=} 0^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0
$\pi/6 \hat{=} 30^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4 \hat{=} 45^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\pi/3 \hat{=} 60^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2 \hat{=} 90^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	nicht definiert

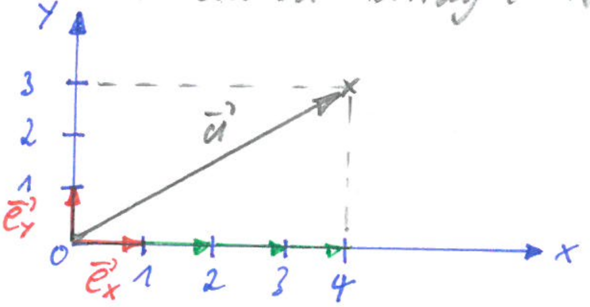
Anmerkung:

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} \tan\alpha = \infty$$

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^+} \tan\alpha = -\infty$$

2.) Vektordarstellung, Vektorzerlegung

Vektor durch Betrag ("Pfeillänge") und Richtung ("Pfeilspitze") gekennzeichnet



$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$: kartesische Basisvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y = 4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$$

Allgemein: $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$

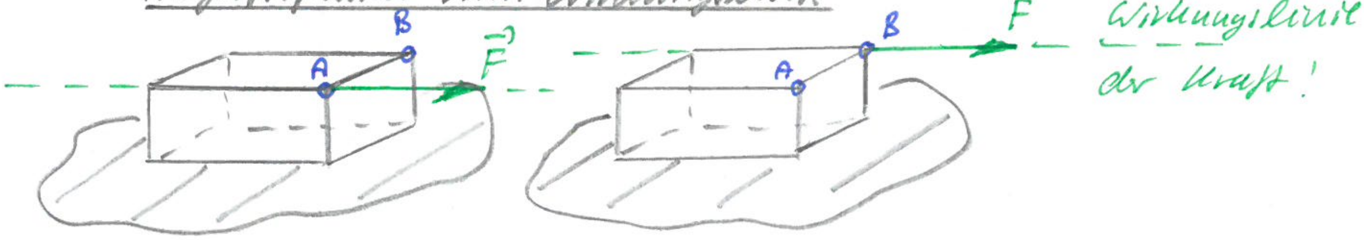
B. Dynamische Grundlagen

Maßeinheit: $[F] = N$

N: Newton $1N = 1\,\frac{kgm}{s^2}$

1.) Die Einzelkraft / Kraft

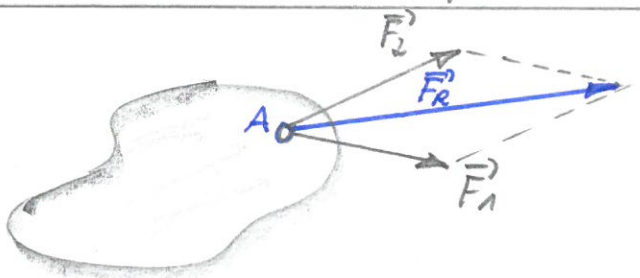
Angriffspunkt und Wirkungslinie



Trotz gleichem Betrag und gleicher Richtung stellen sich unterschiedliche Wirkungen auf die Kiste ein. Grund: Unterschiedliche Angriffspunkte

$\Rightarrow$ Die Kraft ist ein gebundener Vektor (gebunden an den Angriffspunkt bzw. die Wirkungslinie)

2. Resultierende von Kräften mit gemeinsamem Angriffspkt.

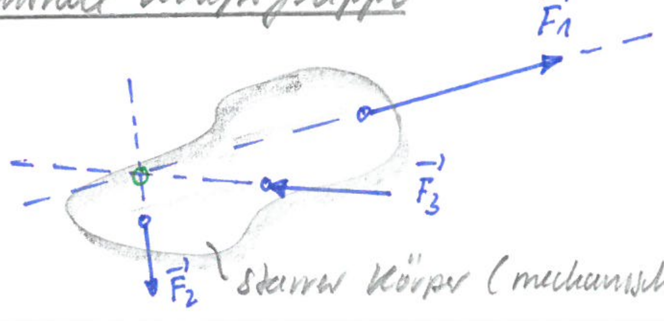


Mehrere Kräfte in einem gemeinsamen Angriffspkt. können durch eine resultierende Kraft ersetzt werden

$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ bzw. bei n Kräften: $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

3. Zentrale Kräftegruppe



starrer Körper (mechanische Kartoffel)

Schneiden sich die Wirkungslinien aller an einem starren Körper angreifenden Kräfte in einem gemeinsamen Punkt, liegt eine <u>zentrale Kräftegruppe</u> vor. Auch hier kann man alle Kräfte durch eine Resultierende ersetzen.

<u>Wichtig:</u> Eine <u>zentrale Kräftegruppe</u> ist im Gleichgewicht, wenn ihre Resultierende verschwindet / "Null" ist.

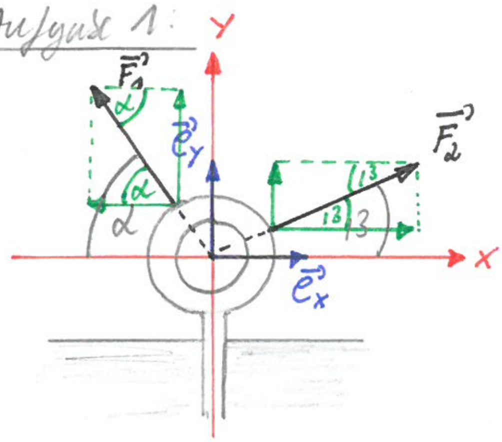
$$\vec{F}_R := \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \overset{!}{=} \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} F_{nx} \\ F_{ny} \\ F_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{matrix}}$$

Kurzschreibweise

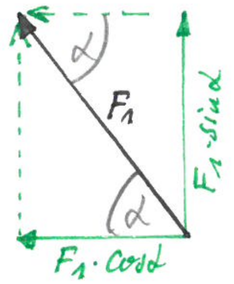
Kräftegleichgewicht!

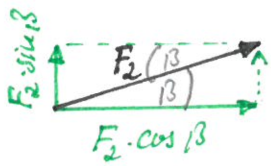
Aufgabe 1:



(a) Darstellung der Kraftvektoren

$$\vec{F_1} = -F_1 \cos\alpha\, \vec{e_x} + F_1 \cdot \sin\alpha\, \vec{e_y}$$
$$= F_1 \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$





$$\vec{F_2} = F_2 \cos\beta\, \vec{e_x} + F_2 \sin\beta\, \vec{e_y}$$
$$= F_2 \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

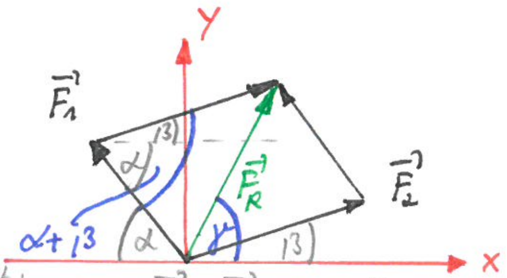
(b) Resultierende Kraft

$$\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = F_1 \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta \\ F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta \end{pmatrix}$$

Betrag der Resultierenden:

$$|\vec{F_R}| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta)^2 + (F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta)^2}$$
$$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \underbrace{(\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)}_{= \cos(\alpha+\beta)}}$$
$$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos(\alpha+\beta)}$$

Plausibel über graphische Repräsentation



Kosinussatz:

$$F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cdot \cos(\alpha+\beta) = F_R^2$$

Richtung soll über den Winkel γ angegeben werden:

Skalarprodukt:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{F_R} \cdot \vec{e_x}}{|\vec{F_R}| \cdot |\vec{e_x}|} = \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cdot \cos(\alpha+\beta)}}$$

Alternativ: $\tan\gamma = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \Rightarrow \gamma = \arctan\left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right) = \underline{\underline{\arctan\left(\frac{F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta}{-F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta}\right)}}$

(c) Forderung: Die Resultierende soll nur in Y-Richtung weisen

$\Rightarrow \underline{F_{Rx} \overset{!}{=} 0}$

Gegeben: $F_1 = 2{,}5\,kN$, $F_2 = 2\,kN$, $\beta = 30°$

Gesucht: α

Es war $F_{Rx} = -F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{F_2}{F_1}\cdot\cos\beta = \frac{2}{2{,}5}\cdot\cos 30°$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{2{,}5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{2}{5}\sqrt{3}$$

$$\alpha = \arccos\left(\tfrac{2}{5}\sqrt{3}\right) = \arccos(0{,}6928)$$

$$\approx \underline{\underline{46{,}15°}}$$