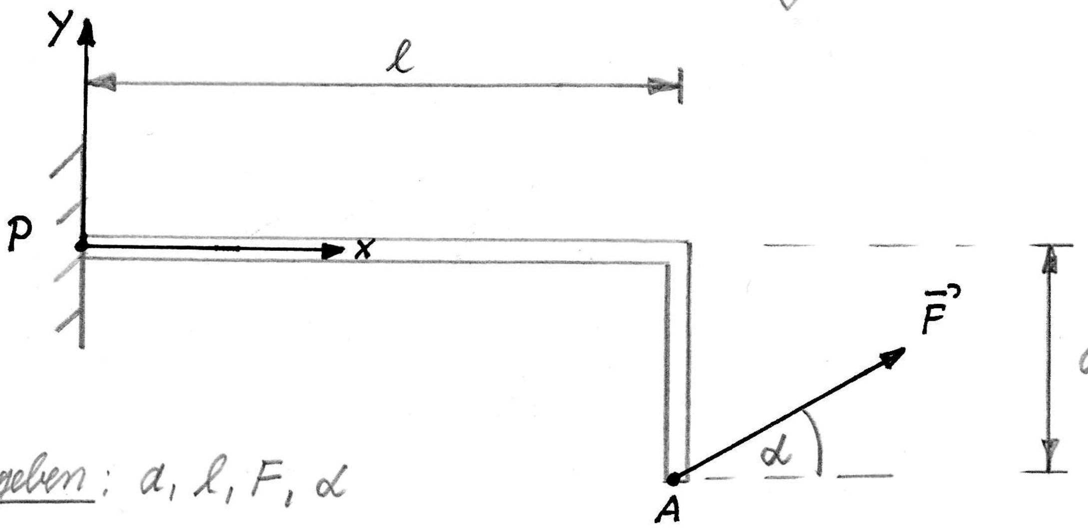
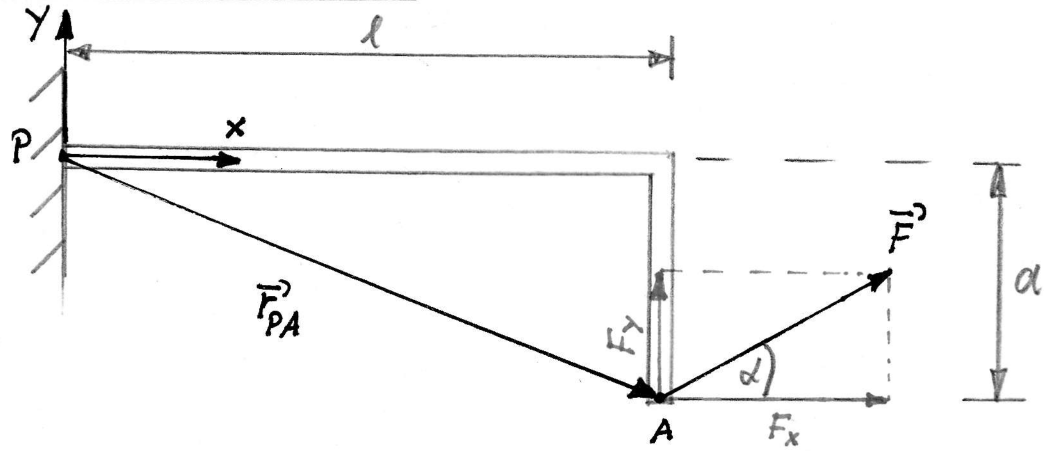
Aufgabe: Ermitteln Sie das Kraftmoment der Einzelkraft $\vec{F}$ bezüglich des Einspannungspunktes P.



Gegeben: a, l, F, α

Nachfolgend werden 4 verschiedene Lösungswege aufgezeigt. Wir beginnen mit der "vektoriellen" Methode ausgehend vom Vektorprodukt!

1. Vektorielle Methode:



Abstandsvektor vom Bezugspunkt P zum Kraftangriffspunkt A:

$$\vec{r}_{PA} = l\,\vec{e}_x - a\,\vec{e}_y = \underline{\underline{\begin{pmatrix} l \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Kraftvektor:

$$\vec{F} = F_x\,\vec{e}_x + F_y\,\vec{e}_y = F\cos\alpha\,\vec{e}_x + F\sin\alpha\,\vec{e}_y$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} F\cos\alpha \\ F\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Kraftmoment bezüglich Punkt P:

$$\vec{M}^{(P)} = \vec{r}_{PA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \oplus\, \vec{e}_x & \ominus\, \vec{e}_y & \oplus\, \vec{e}_z \\ l & -a & 0 \\ F\cos\alpha & F\sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$= + \vec{e}_x \begin{vmatrix} -a & 0 \\ F\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} l & 0 \\ F\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} l & -a \\ F\cos\alpha & F\sin\alpha \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach 1. Zeile

$$= \vec{e}_z \, [\, l \cdot F\sin\alpha - F\cos\alpha \cdot (-a) \,]$$

$$= \vec{e}_z \cdot F \cdot (l\sin\alpha + a\cos\alpha) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \cdot (l\sin\alpha + a\cos\alpha) \end{pmatrix}}} \quad (1)$$

Ebene Methoden

Allen ebenen Methoden geht eine Überlegung zur Richtung des Kraftmomentes voraus. Dazu nutzen wir die Rechtsschraubenregel. Wir überlegen uns den potenziellen Drehsinn des Hakens bezüglich P und gehen diesem Drehsinn mit gekrümmten Fingern (ohne Daumen) der rechten Hand nach. Der Daumen zeigt dann in Richtung des Momentes, hier also in positive z-Richtung (Probieren Sie es mal!). Den Betrag des Momentes können wir nun auf mindestens 3 verschiedene Arten ermitteln!

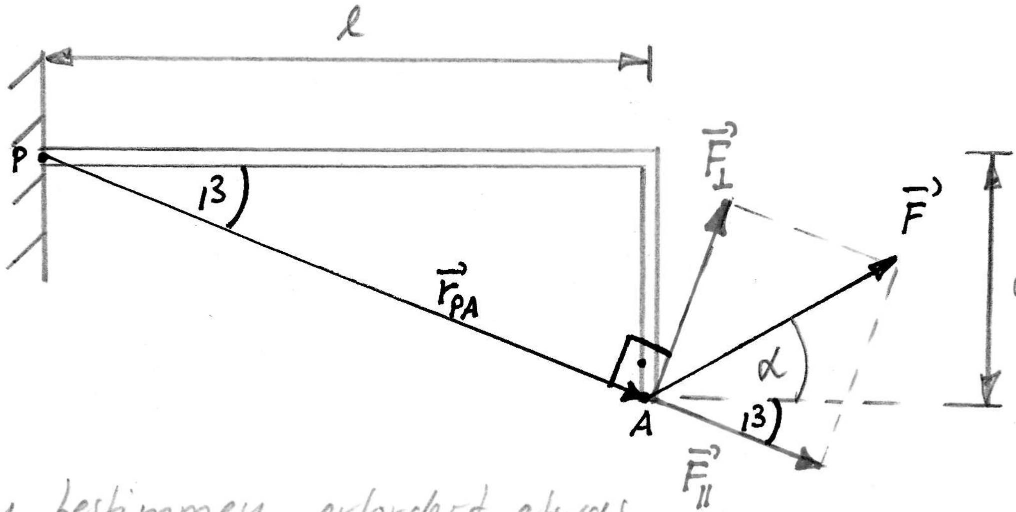
2. Ebene Methode Nr. 1

$$|\vec{M}^{(P)}| = |\vec{r}_{PA}| \cdot |\vec{F}_\perp|$$

Den Betrag des Abstandsvektors berechnen wir mittels Pythagoras:

$$\underline{\underline{|\vec{r}_{PA}| = \sqrt{l^2 + a^2}}}$$

$\vec{F}_\perp$ meint den Kraftanteil, der senkrecht auf dem Abstandsvektor $\vec{r}_{PA}$ steht (siehe Skizze)



$|\vec{F}_\perp|$ zu bestimmen, erfordert etwas Trigonometrie. Wir benötigen den Winkel β bzw. sin β und cos β :

$$\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{l^2+a^2}} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}} \qquad (2)$$

$$|\vec{F}_\perp| = F\cdot\sin(\alpha+\beta) \overset{(*)}{=} \underline{\underline{F\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha)}}$$

$$\Rightarrow |\vec{M}^{(P)}| \overset{(2)}{=} \sqrt{l^2+a^2}\cdot F\cdot\left(\sin\alpha\cdot\frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+l^2}}\cdot\cos\alpha\right)$$

$$= \underline{\underline{F\cdot(l\sin\alpha + a\cos\alpha)}}$$

$$\Rightarrow \vec{M}^{(P)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +|\vec{M}^{(P)}| \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +F(l\sin\alpha + a\cos\alpha) \end{pmatrix}}} \qquad (3)$$

Natürlich sind (3) und (1) gleich!

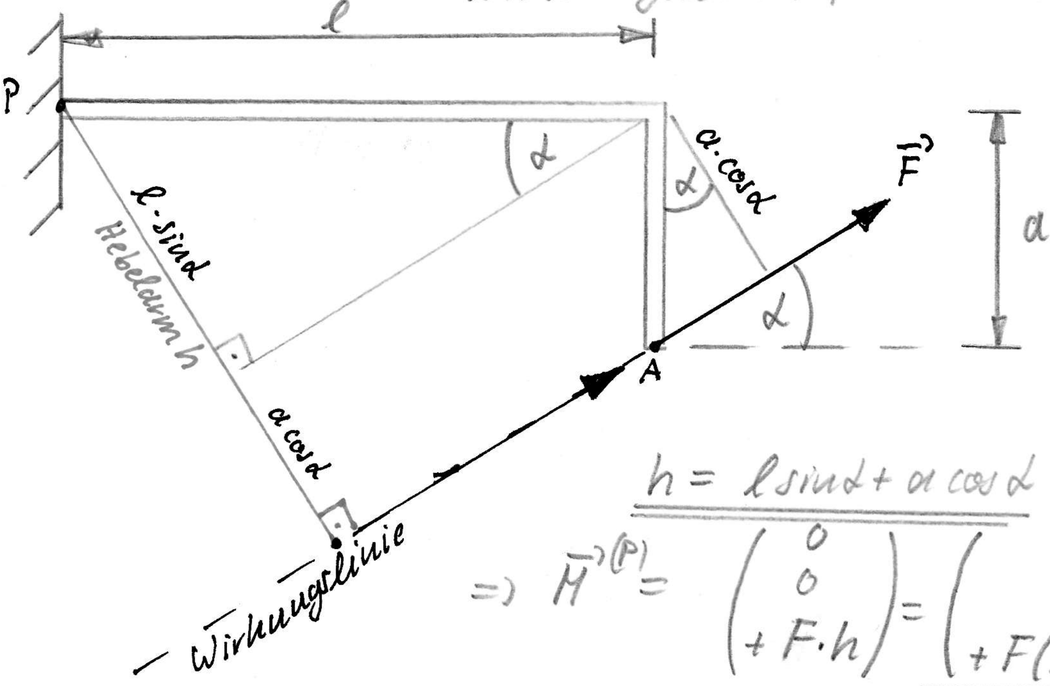
(*) : Additionstheorem: $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

Übrigens: $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

3. Ebene Methode Nr. 2

Diesmal zerlegen wir nicht die Kraft, sondern nehmen den Betrag der Kraft und multiplizieren diesen mit dem Hebelarm h. Das ist der kürzeste (und damit senkrechte) Abstand des Bezugspunktes P von der Wirkungslinie der Kraft (siehe Skizze). In Gedanken verschieben wir $\vec{F}$ entlang ihrer Wirkungslinie!

$$|\vec{M}^{(P)}| = h \cdot |\vec{F}|$$



$$h = l\sin\alpha + a\cos\alpha$$

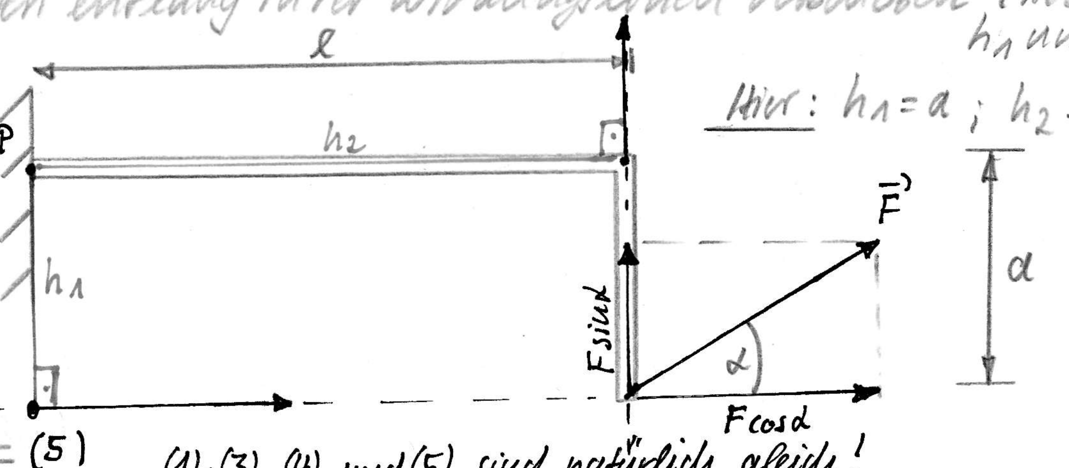
$$\Rightarrow \vec{M}^{(P)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +F\cdot h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +F(l\sin\alpha + a\cos\alpha) \end{pmatrix} \quad (4)$$

4. Ebene Methode Nr. 3

Dies beinhaltet eine "Kombination". Zuerst wird die Kraft $\vec{F}$ in x- und y-Komponente zerlegt und anschließend die beiden Komponenten entlang ihrer Wirkungslinien verschoben (Hebelarme h_1 und h_2)!

$$|\vec{M}^{(P)}| = F\cos\alpha \cdot h_1 + F\sin\alpha \cdot h_2$$

$$\vec{M}^{(P)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(a\cos\alpha + l\sin\alpha) \end{pmatrix} \quad (5)$$



(1), (3), (4) und (5) sind natürlich gleich!