TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme – Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Dr.-Ing. Markus Heß
M.Sc. Justus Benad
Josefine Wilhayn

Numerische Simulationsverfahren im Ingenieurwesen

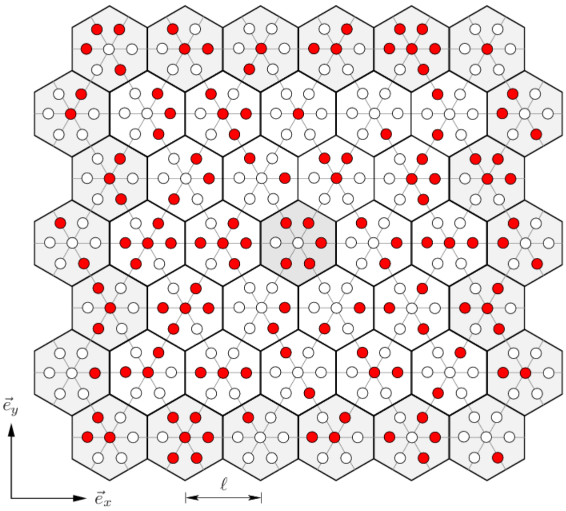
Hausaufgabenblatt 5 WS 18/19

Thema: Gittergase und Gitter-Boltzmann-Methode

Theorieaufgabe: Gittergase (10 Punkte)

Aufgabe 1: FHP-III Gittergas

Nachstehende Abbildung zeigt den Ausschnitt der initialen Zellenbesetzung eines **FHP-III** Gitters.



a) Ermitteln Sie im Rahmen eines Coarse Graining die mittleren Besetzungszahlen $N^{\alpha}(\vec{r}, t_0)$ für die gegebene Ausgangskonfiguration. In das Coarse Graining sollen dabei **alle** gezeigten Zellen eingehen.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) die Massen- und Impulsdichte des abzubildenden Fluides am Ort $\vec{r}$ zur Anfangszeit t_0. Der Ort $\vec{r}$ gibt die Position des grau markierten Mittelknotens an. Zur Anpassung der Maßeinheiten sind die Bezugsdichte ρ_0 und die Teilchengeschwindigkeit v_0 zu berücksichtigen.

Aufgabe 2: FHP-I, II, III

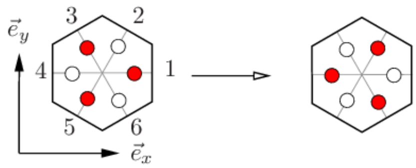
a) Mit Hilfe des FHP-I Gittergases (D2Q6) soll die Strömung eines viskosen Fluids abgebildet werden. Dazu müssen aus der gegebenen Anfangsdichte $\rho(\vec{r}, t_0)$ und der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t_0)$ des Fluids die mittleren Besetzungszahlen

$N(\vec{r},t_0)$ berechnet werden. Führen Sie diesen Schritt bitte durch, in dem Sie die unbekannten Koeffizienten a und b in dem linearen Ansatz

$$N^\alpha(\vec{r},t_0) \;=\; N^\alpha\big(\rho(\vec{r},t_0),\vec{v}(\vec{r},t_0)\big) \;=\; a\rho(\vec{r},t_0)+b\rho(\vec{r},t_0)\vec{v}(\vec{r},t_0)\cdot\vec{e}^\alpha \qquad (1)$$

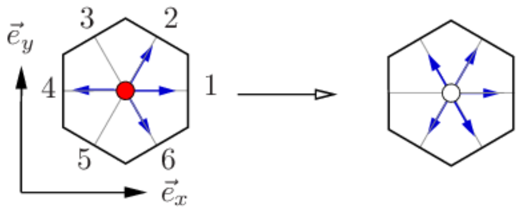
bestimmen. Setzen Sie die berechneten Koeffizienten abschließend bitte wieder in den durch Gleichung (1) gegebenen Ansatz ein.

b) Der Kollisionsoperator des FHP-I-Modells berücksichtigt 2- und 3-Teilchenstöße. Die nachfolgende Abbildung zeigt beispielhaft einen 3-Teilchenstoß.



Geben Sie den Anteil $\Omega^\alpha_{(3)}$ des Stoßoperators an, der **alle** 3-Teilchen-Stöße des FHP-I-Modells berücksichtigt. Gehen Sie dabei zwingend von der in der Abbildung gegebenen Nummerierung für die Besetzungszahlen n^α mit $\alpha = 1,\ldots,6$ aus.

c) Nachfolgend ist ein Stoß auf einem D2Q7-Gitter gezeigt. Zeigen Sie, dass bei diesem Stoß der Impuls erhalten bleibt. Überprüfen Sie zudem, ob die (kinetische) Energie ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist.

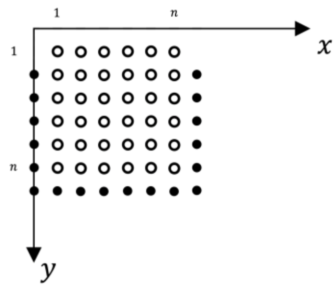


d) Erklären Sie kurz den Unterschied zwischen der Bounce-Back-Regel und der Bounce-Away-Regel. Welche Strömungsrandbedingungen werden im Rahmen der Gittergase mit diesen Regeln abgebildet?

Programmieraufgabe: Strömungssimulation (15 Punkte)

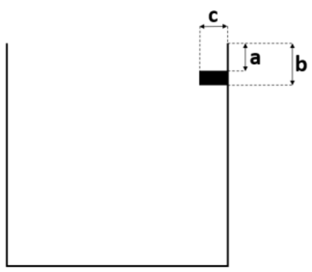
Schreiben Sie eine Funktion `NumSimHA5(n,K,h)`, welche das Ergebnis einer 2D Strömungssimulation in Figure 1 zeigt. Verwenden Sie für die Simulation die „Gitter-Boltzmann-Methode" (D2Q9 Modell).

n: Das Gebiet soll aus einem Gitter mit $n \times n$ Punkten bestehen. Dabei ist $j = 1, 2, 3 \dots n$ der Index der Gitterpunkte in x-Richtung, und $i = 1, 2, 3 \dots n$ der Index der Gitterpunkte in y-Richtung. Wählen Sie $\Delta x = \Delta y = 1$, so dass der Index j die Position der Gitterpunkte in x-Richtung und der Index i die Position der Gitterpunkte in y-Richtung angibt. Simuliert werden soll vorerst der sogenannte „Lid-Driven Cavity Flow". Begrenzen Sie dazu das quadratische Gebiet links, rechts und unten (siehe Bild) mit festen Wänden. Sie erreichen dies durch die Verwendung von „Bounce-back" Randbedingungen.



K: Die Simulation soll K Zeitschritte haben. Zu Beginn soll das Fluid in Ruhe sein. Nur am oberen Rand gibt es eine Geschwindigkeit: Weisen Sie allen Punkten mit $i = 1$ die Geschwindigkeitskomponenten $u = 0.22$ in x-Richtung und $v = 0$ in y-Richtung zu. Diese Geschwindigkeitskomponenten in der ersten Zeile sollen auch in jedem weiteren Zeitschritt beibehalten werden. Wählen Sie bei der Simulation mit der „Gitter-Boltzmann-Methode" (D2Q9 Modell) für die Gittergeschwindigkeit $c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 1$, und für die Relaxationszeit $\tau = \frac{2}{3}$.

h: Wird $h = 0$ gewählt, so soll der oben beschriebene „Lid-Driven Cavity Flow" im quadratischen Gebiet simuliert werden. Ist jedoch $h = 1$, so soll ein Block am rechten Rand „eingebaut" werden, wobei $a \approx \frac{n}{8}$, $b \approx \frac{3}{16}n$ und $c \approx \frac{n}{8}$. (siehe Bild) Dieser begrenzt das nun nicht mehr quadratische Simulationsgebiet ebenfalls mit festen Wänden, die „Bounce-back" Randbedingungen gelten nach wie vor.

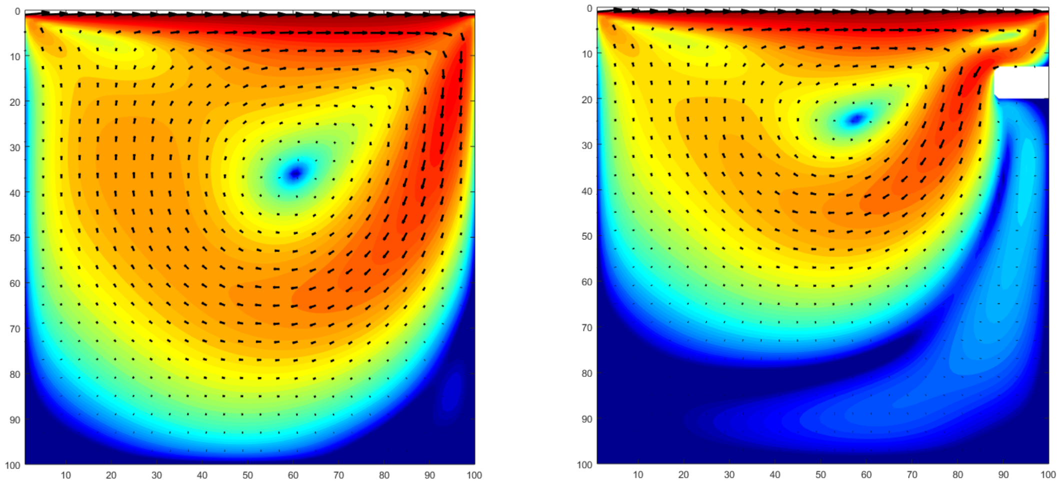


Tipps zum Vorgehen: Weitere Tipps zum Vorgehen bei der Simulation werden in der Rechnerübung am 21.01.2019 um 14[15] Uhr im H0111 gegeben.

Ausgabe: Stellen Sie das Geschwindigkeitsfeld der Strömung nach K Zeitschritten in Figure 1 dar. Orientieren Sie sich bei der Art der Darstellung an dem folgenden Bild (die Farben richten sich nach dem Betrag der Geschwindigkeit). Nutzen Sie eine logarithmische Skalierung der Matlab Farbskala `jet` um auch betragsmäßig kleine Geschwindigkeiten darstellen zu können. Setzten Sie dazu z.B.

```
average = sqrt(sum(u.^2,3)); u_abs = log(average/20);
```

Achten Sie außerdem auf eine gute Sichtbarkeit der Geschwindigkeitsvektorpfeile (hier keine logarithmische, sondern lineare Darstellung) bei verschiedenen n.



Hinweise zur Abgabe der Programmieraufgabe:

Das Skript `NumSimHA5.m` bitte als Anhang einer E-Mail mit dem Betreff `NumSimHA5` an j.benad@tu-berlin.de senden.

Die Abgabedeadline ist der 31.01.2019 um 12^{15} Uhr.

Bitte in dem Skript die folgende Form verwenden:

```
% Nachname1     Matrikelnummer1   (Liste bitte alphabetisch nach Nachnamen ordnen)
% Nachname2     Matrikelnummer2
% Nachname3     Matrikelnummer3
% Nachname4     Matrikelnummer4

function NumSimHA5(n,K,h)

    % Hier den Code einfügen. Bitte gut kommentieren.

end
```