TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

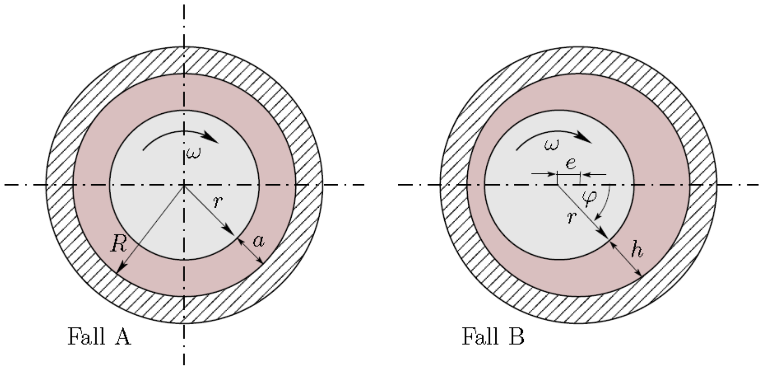
Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2018/19 – UE 12

Thema: Hydrodynamische Schmierung

Aufgabe 1: Schmierung eines Lagers

Eine der technisch wichtigsten laminaren Bewegungen einer zähen Flüssigkeit ist die Bewegung eines Schmiermittels zwischen Zapfen und Lager. Im vorliegenden Fall dreht sich eine Welle mit Radius r und Länge l mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω, während der äußere Zylinder vom Radius $r + a$ unbeweglich ist. Bei konzentrischer Bewegung (Fall A) ergibt sich ein Reibungsmoment an der Welle, das nicht von der Belastung des Zapfens abhängt. Im Allgemeinen (Fall B) liegt die Welle in Bezug auf das Lager exzentrisch, da sie unter Last ist. Es wird angenommen, dass die Flüssigkeit mit der dynamischen Viskosität η inkompressibel ist und den ganzen Raum zwischen Welle und Zapfen füllt. Ferner sei die Spaltbreite $a \ll r$, sodass mit genügender Genauigkeit für das im Spalt vorhandene Schmiermittel eine ebene Hagen-Poiseuillesche-Schichtenströmung vorausgesetzt werden darf. Da die auftretenden Reynoldszahlen gewöhnlich sehr klein sind, dürfen die Trägheitskräfte gegenüber den viskosen Kräften vernachlässigt werden.



a) Bestimmen Sie zunächst die Schichtdicke h als Funktion des Umlaufwinkels φ und anschließend die Geschwindigkeit des Fluides v_φ mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Gleichungen für eine Strömung nach Hagen-Poiseuille.

b) Der Volumenstrom zwischen Zapfen und Lager soll mit $Q := l\omega r \, h_0/2$ bezeichnet werden. Berechnen Sie den noch unbekannten Koeffizienten h_0 durch Auswertung der periodischen Bedingung für den Druck $p(0) = p(2\pi)$ und diskutieren Sie im Anschluss daran die Form der Funktion $p(\varphi)$.

c) Wie groß ist das Reibmoment an der Welle?

d) Bestimmen Sie die resultierende Kraft aus der Druckverteilung auf den Zapfen.

Lösung Aufgabe 1:

a) Aus dem Cosinus-Satz folgt die Beziehung

$$\begin{aligned}(r+a)^2 &= e^2+(r+h)^2-2e(r+h)\cos\varphi \\ \Rightarrow h &= e\cos\varphi - r+\sqrt{(r+a)^2-e^2\sin\varphi}\approx a+e\cos\varphi.\end{aligned} \tag{1}$$

Unter den getroffenen Voraussetzungen ist die Strömung überall näherungsweise eben und tangential gerichtet. Für eine laminare Strömung wurde in der Vorlesung das Geschwindigkeitsprofil hergeleitet:

$$v_\varphi(z)=\frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}z(z-h)-\frac{v_0}{h}(z-h)=\frac{1}{2\eta r}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}z(z-h)-\frac{\omega r}{h}(z-h). \tag{2}$$

b) Der Volumenstrom ergibt sich zu

$$\begin{aligned}Q=l\int_0^h v(z)\,\mathrm{d}z&=\left[-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}\frac{h^3}{12\eta}+\frac{\omega rh}{2}\right]l:=l\omega r\frac{h_0}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}&=6\omega r^2\eta\left(\frac{1}{h^2}-\frac{h_0}{h^3}\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Die Auswertung der Periodizität

$$p(2\pi)-p(0)=6\eta\omega r^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{h^2}-\frac{h_0}{h^3}\,\mathrm{d}\varphi=0 \tag{4}$$

liefert dann mithilfe der Integrale

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{h^2}&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+e\cos\varphi)^2}=\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-e^2)^3}}, \\ \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{h^3}&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+e\cos\varphi)^3}=\frac{\pi(2a^2+e^2)}{\sqrt{(a^2-e^2)^5}}\end{aligned} \tag{5}$$

die gesuchte Länge

$$h_0=2a\frac{a^2-e^2}{2a^2+e^2}. \tag{6}$$

Da h eine gerade Funktion in φ ist, ist die Druckdifferenz $p(\varphi)-p(0)$ eine ungerade Funktion und damit aus Symmetriegründen $p(\pi)=p(0)$. Der Druck hat Extremstellen, wenn $h_0=h$ ist, d.h. für

$$2a\frac{a^2-e^2}{2a^2+e^2}=a+e\cos\varphi \quad\Leftrightarrow\quad \cos\varphi=-\frac{3ae}{2a^2+e^2}<0. \tag{7}$$

Dies entspricht genau jeweils einem Extremum an der Unter- und Oberseite. Außerdem ist der Druckgradient bei $\varphi=0$ positiv. An der Unterseite des Zapfens herrscht daher Überdruck, an der Oberseite Unterdruck.

c) Die Reibspannungen am Zapfen sind

$$\tau=\eta\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0}=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}\frac{h}{2}-\frac{\eta\omega r}{h}=-\eta\omega r\left(\frac{4}{h}-\frac{3h_0}{h^2}\right). \tag{8}$$

Das gesamte Reibmoment ist damit

$$\begin{aligned} M_R &= lr^2\int_0^{2\pi}\tau(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -\eta\omega lr^3\left(4\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{h} - 3h_0\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{h^2}\right) \\ &= -\eta\omega lr^3\left(\frac{8\pi}{\sqrt{a^2-e^2}} - \frac{12\pi a^2}{2a^2+e^2}\frac{1}{\sqrt{a^2-e^2}}\right) = -\frac{4\pi\eta\omega lr^3}{\sqrt{a^2-e^2}}\frac{a^2+2e^2}{2a^2+e^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

d) Da die Druckdifferenz eine ungerade Funktion in φ ist, verschwindet die horizontale Komponente der resultierenden Kraft. Für die vertikale Komponente erhält man mit der partiellen Integration

$$F_z = lr\int_0^{2\pi}\Delta p(\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = lr\left[\Delta p\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right] \tag{10}$$

und den Integralen

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{h^2} &= \int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{(a+e\cos\varphi)^2} = -\frac{2\pi e}{\sqrt{(a^2-e^2)^3}}, \\ \int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{h^3} &= \int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{(a+e\cos\varphi)^3} = -\frac{3\pi ea}{\sqrt{(a^2-e^2)^5}} \end{aligned} \tag{11}$$

das Ergebnis

$$F_z = \frac{12\pi\eta\omega lr^3}{\sqrt{a^2-e^2}}\frac{e}{2a^2+e^2}. \tag{12}$$