TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2018/19 – UE 07

Thema: Tangentialkontakt

Aufgabe 1: Schiefe Kraft

Eine elastische Kugel wird an eine starre Ebene gedrückt (siehe Abb. 1), wobei die Richtung der Anpresskraft immer dieselbe bleibt. Zu bestimmen sind die Bedingungen, unter denen das gesamte Kontaktgebiet immer haftet.

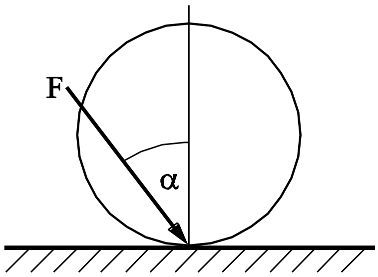

Abb. 1 Elastische Kugel, die durch eine schräge Anpresskraft an eine starre Ebene gedrückt wird.

(a) Bestimmen Sie die Druckverteilung und durch Integration über den Indentierungsprozess die Verteilung der Tangentialspannungen unter der Annahme des ständigen vollständigen Haftens des Kontaktgebiets. Wann kann der Kontakt vollständig haften?

(b) Alternativ kann der Vorgang wie folgt betrachtet werden: Ausgehend von einer beliebigen Konfiguration des Kontaktes wird die Normalkraft um $\mathrm{d}F_N$ und anschließend die Tangentialkraft um $\mathrm{d}F_x$ erhöht. Bestimmen Sie mithilfe der Lösungen von Hertz und Cattaneo-Mindlin den neuen Kontaktradius und Haftradius nach diesem Belastungs-Inkrement. Wann kann der Kontakt vollständig haften?

Lösung Aufgabe 1:

In der Vorlesung wurde der Fall einer konstanten Normalkraft (und entsprechend einem festen Kontaktradius *a*) mit einer ansteigend aufgebrachten Tangentialkraft gelöst (das Cattaneo-Mindlin-Problem). In der vorliegenden Aufgabe wachsen beide Kräfte gleichzeitig, wobei

$$F_x = F_N \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F_N \tan\alpha. \tag{1}$$

a) Die Indentierung verläuft von einem Kontaktradius $\tilde{a} = 0$ bis zum Kontaktradius $\tilde{a} = a$, wobei

$$\tilde{F}_N = \frac{4}{3} E^* \frac{\tilde{a}^3}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\tilde{F}_N = 4E^* \frac{\tilde{a}^2}{R} \mathrm{d}\tilde{a}. \tag{2}$$

Wenn man annimmt, dass das gesamte Kontaktgebiet während des ganzen Prozesses haftet, ist der inkrementelle Beitrag zur Schubspannung, wenn das Kontaktgebiet von $\tilde{a}$ zu $\tilde{a} + \mathrm{d}\tilde{a}$ wächst, durch

$$\mathrm{d}\tau(r) = \frac{\mathrm{d}\tilde{F}_x}{2\pi\tilde{a}^2}\left(1 - \frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} = \frac{\mathrm{d}\tilde{F}_N \tan\alpha}{2\pi\tilde{a}^2}\left(1 - \frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} = \frac{2E^*}{\pi R}\tan\alpha\left(1 - \frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} \mathrm{d}\tilde{a}, \;\; r \le \tilde{a}. \tag{3}$$

gegeben. Die gesamte Schubspannung ergibt sich aus dem Integral (es ergeben sich erst Beiträge zur Schubspannung, wenn $\tilde{a} \ge r$, daher die Untergrenze *r*)

$$\tau(r;a) = \frac{2E^*}{\pi R}\tan\alpha \int_r^a \left(1 - \frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} \mathrm{d}\tilde{a} = \frac{2E^*}{\pi R}\tan\alpha\sqrt{a^2 - r^2}. \tag{4}$$

Die Druckverteilung ist aus der Hertzschen Lösung bekannt:

$$p(r;a) = \frac{2E^*}{\pi R}\sqrt{a^2 - r^2}. \tag{5}$$

Das gesamte Kontaktgebiet kann immer haften, falls

$$\tau(r) \le \mu p(r) \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha < \mu. \tag{6}$$

b) Die Aufgabe kann auch auf eine elegantere Weise gelöst werden: Gegeben sei ein momentanes Gleichgewicht des Kontaktes mit den Kräften F_N und F_x sowie dem Kontaktradius *a*. Nun wird zunächst die Normalkraft um $\mathrm{d}F_N$ erhöht, der Kontaktradius wächst nach der Hertzschen Theorie zu

$$a + \mathrm{d}a = a\left(1 + \frac{\mathrm{d}F_N}{F_N}\right)^{1/3}. \tag{7}$$

Unabhängig von der vorherigen Belastungsgeschichte wird so zunächst das ganze Kontaktgebiet haften (das Gleitgebiet bei der Kraft F_N befindet sich ständig an der Grenze $\tau = \mu p$ zum möglichen Haften, eine geringe Erhöhung des Drucks führt also zu vollständigem Haften). Durch das Aufbringen einer zusätzlichen Kraft $\mathrm{d}F_x$ kann sich aber wieder Gleiten vom Rand des Kontaktes aus ausbreiten. Der Radius des Haftgebiets *c* ist aus der Theorie von Cattaneo und Mindlin durch

$$c = (a + \mathrm{d}a)\left(1 - \frac{\mathrm{d}F_x}{\mu(F_N + \mathrm{d}F_N)}\right)^{1/3} = a\left(1 + \frac{\mathrm{d}F_N}{F_N} - \frac{\mathrm{d}F_x}{\mu F_N}\right)^{1/3} \tag{8}$$

gegeben. Falls $c > a$, breitet sich das Kontaktgebiet schneller aus, als sich Gleiten vom Rand des Kontaktes ausbilden kann, und der ganze Kontakt haftet damit. Das führt auf die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}F_N} = \tan\alpha < \mu. \tag{9}$$

Diese Bedingung ist, wie aus dieser Herleitung ersichtlich wird, sogar unabhängig von eventuell zusätzlich aufgebrachten konstanten Kräften in normaler oder tangentialer Richtung.