TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2018/19 – UE 05

Thema: Rigorose Behandlung des adhäsiven Kontaktproblems

Aufgabe 1: Adhäsion in Mikro-Elektromechanischen Systemen (MEMS)

Die Kräfte, die bei mikrotechnischen Systemen relevant sind, sind andere als bei „größeren" (konventionellen) Systemen. Das hängt damit zusammen, dass das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen größer wird, je kleiner die beteiligten Körper sind. Daher spielt Adhäsion in mikroelektromechanischen Systemen (MEMS) häufig eine große Rolle.
Im Folgenden soll eine typische Fragestellung untersucht werden, die im Zusammenhang mit der Auslegung von MEMS auftritt.
Wie lang darf der skizzierte schlanke Balken mit dem Elastizitätsmodul E höchstens sein, damit ein Kontakt (wie in der Skizze) verhindert wird?
Die effektive Oberflächenenergie zwischen Balken und Unterlage sei $\Delta\gamma$. Die Breite des Balkens (senkrecht zur Zeichenebene) sei a, die Dicke t.

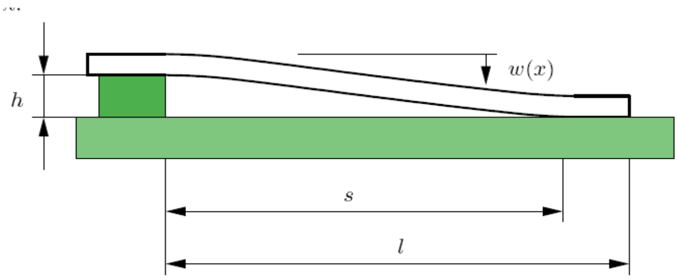

Abb. 1 Adhäsiver Kontakt eines mikromechanischen schlanken Balkens

Aufgabe 2: Messung der Oberflächenspannung von Glimmer

Glimmer (eine Gruppe von Schichtsilikaten) sind sehr interessante Materialien: Sie können – entlang der Silikatschichten – atomar glatt gebrochen werden.
Durch äußere Kräfte werde unter Überwindung der Oberflächenspannung von einem Körper eine Schicht (von der Stärke t) abgespalten (Abb. unten). Man leite die Beziehung zwischen der Oberflächenenergie und der Form der sich abspaltenden Plattenschicht ab[1]. Betrachten Sie die Ausbreitung der Rissfläche unter kraftgesteuerten (Kraft ist konstant, d.h. die Kraft wird durch einen sehr weichen Mechanismus aufgebrachten) und weggesteuerten (Auslenkung ist kontant, d.h. die Kraft wird durch einen sehr steifen, bzw. starren Mechanismus aufgebracht) Bedingungen.

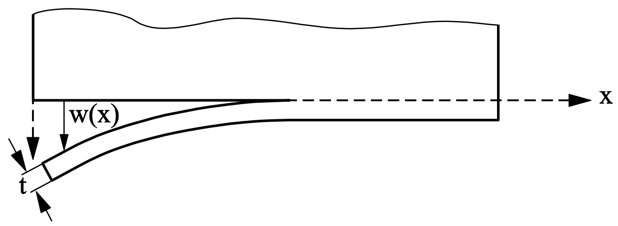

Abb. 2 Von einem elastischen Körper wird eine einzelne Plattenschicht abgespalten

---

[1] Dieses Problem untersuchte I.W. Obreimov (1930) im Zusammenhang mit der von ihm entwickelten Methode zur Messung der Oberflächenspannung von Glimmer; die so durchgeführten Messungen waren die ersten direkten Messungen zur Bestimmung der Oberflächenspannung fester Körper.

Lösung Aufgabe 1:

Die Lösung der statischen Balkengleichung ohne Streckenlast, $w^{\mathrm{IV}}(x)=0$, mit den Randbedingungen

$$w(0)=0,\quad w'(0)=0,\quad w(s)=h,\quad w'(s)=0 \tag{1}$$

lautet

$$w(x)=h\left[3\left(\frac{x}{s}\right)^2-2\left(\frac{x}{s}\right)^3\right] \quad\Rightarrow\quad w''(x)=\frac{6h}{s^2}\left(1-\frac{2x}{s}\right). \tag{2}$$

Die gesamte in der Verformung gespeicherte elastische Energie ist damit

$$U_{el}=\frac{EI}{2}\int_0^s\left[w''(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{3Eat^3h^2}{2s^4}\int_0^s\left(1-\frac{2x}{s}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{Eat^3h^2}{2s^3}. \tag{3}$$

Die Gesamtenergie aus elastischer und Oberflächen-Wechselwirkung ist durch die Summe

$$U_{tot}=\frac{Eat^3h^2}{2s^3}+\Delta\gamma(s-l) \tag{4}$$

gegeben. Die Gleichgewichtskonfiguration (falls diese existiert) bestimmt sich durch die Bedingung

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial s}=0 \quad\Rightarrow s_G=\sqrt[4]{\frac{3Eh^2t^3}{2\Delta\gamma}}. \tag{5}$$

Falls $l > s_G$ kann der Balken an der Unterlage kleben (man beachte, dass s_G tatsächlich immer einem Minimum der Gesamtenergie entspricht).

Lösung Aufgabe 2:

Es sei angenommen, dass die Schicht durch eine einzelne Querkraft F am linken Ende abgespalten wird. Die Schicht kann als eine Blattfeder mit der Länge l betrachtet werden. Der Zusammenhang zwischen der Kraft F und der Absenkung h des Angriffspunktes der Kraft ist daher

$$F=\frac{3EI}{l^3}h \tag{6}$$

Die gesamte in der Deformation gespeicherte Energie ist deswegen

$$U_{el}=\int_0^h F(\tilde{h})\mathrm{d}\tilde{h}=\frac{3EIh^2}{2l^3}=\frac{F^2l^3}{6EI}. \tag{7}$$

Bei Wegsteuerung (h = konstant) lautet die Gleichgewichtsbedingung wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{3EIh^2}{2l^3}+2\gamma al\right)=-\frac{9EIh^2}{2l^4}+2\gamma a=0 \quad\Rightarrow\quad \gamma=\frac{9EIh^2}{4l^4a}=\frac{3Et^3h^2}{16l^4}. \tag{8}$$

Bei Kraftsteuerung wird durch die angreifende Arbeit verrichtet (da sich h ändern kann). Die Gleichgewichtsbedingung ist dann durch

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{F^2l^3}{6EI}+2\gamma al\right)-F\frac{\partial h}{\partial l}=-\frac{F^2l^2}{2EI}+2\gamma a=0 \quad\Rightarrow\quad \gamma=\frac{F^2l^2}{4EIa}=\frac{3F^2l^2}{Et^3a^2}. \tag{9}$$

gegeben. Die Ergebnisse (8) und (9) stimmen natürlich (bei Berücksichtigung von Gleichung (6)) miteinander überein.