TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2018/19 – VL 03

Thema: Kapillare Effekte in Kontakten

Übungsaufgabe: Steighöhe in einer Kapillare

Wie hängt die Steighöhe in einer Kapillare (siehe Abb. 1) von der Oberflächenspannung γ und dem Kontaktwinkel θ (und der Erdbeschleunigung g, der Dichte der Flüssigkeit ρ sowie dem Radius der Kapillaren r) ab? Verwenden Sie das Grundgesetz der Hydrostatik und vernachlässigen Sie dabei die potentielle Energie der Flüssigkeit, welche sich oberhalb der Höhe h befindet.

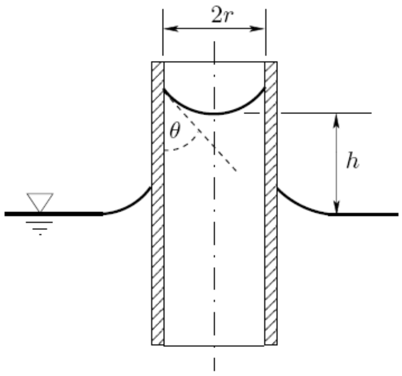

Abb. 1 Steighöhe in einer Kapillare

Lösung Aufgabe 1

Solch eine Kapillarwirkung stellt sich beispielsweise zwischen Wasser und reinem Glas ein. Die Oberflächenspannung in der freien Oberfläche sorgt für eine vertikal nach oben gerichtete Kraft. Auf beiden Seiten der Flüssigkeitsoberflächen im Rohr besteht ein Druckunterschied, wobei stets auf der „hohlen“ Seite der größere Druck vorliegt. Nach der Young-Laplace-Gleichung ist dieser Unterschied:

$$\Delta p = \gamma_{12}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = -\frac{2\gamma_{12}}{R} \tag{1}$$

Mit R_1 und R_2 sind die Krümmungsradien der Kugel gemeint: $R_1 = R_1 = R$; Minuszeichen, weil R außerhalb der Flüssigkeit liegt; γ_{12} ist Oberflächenspannung zwischen Flüssigkeit und Luft.
In dieser Gleichung wurde dabei vorausgesetzt, dass der Durchmesser des Röhrchens genügend klein ist, so dass man die Flüssigkeitsoberfläche als Kugelkalotte (Radius *R*) annehmen darf.
Aus dem hydrostatischen Grundgesetz folgt, dass in gleichen Höhen auch der gleiche Druck herrscht. Demnach muss auf der Flüssigkeitsseite der Grenzfläche der Druck p_F wirken:

$$p_F = p_0 - \rho g h \tag{2}$$

Es sei angemerkt, dass dieser Druck nur in guter Näherung überall auf Flüssigkeitsseite der Grenzfläche gilt (Flüssigkeit oberhalb von *h* sollte nach Aufgabenstellung vernachlässigt werden).
Der Druckunterschied ist damit

$$\Delta p = p_F - p_0 = -\rho g h \tag{3}$$

Gleichsetzen von dieser Gleichung und der Laplace-Young-Gleichung (1) = (2) ergibt

$$h = \frac{2\gamma_{12}}{\rho g R} \tag{4}$$

Aus der Geometrie bestimmt man:

$$r = R\cos\theta \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{r}{\cos\theta} \tag{5}$$

Das wiederum ergibt eingesetzt

$$h(\theta,\gamma_{12}) = \frac{2\gamma_{12}\cos\theta}{\rho g r}. \tag{6}$$