# TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

## Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2018/19 – UE 01

### Thema: Qualitative Abschätzungen zu Normalkontaktproblemen ohne Adhäsion

Eine zentrale Aufgabe der Kontaktmechanik ist die Berechnung des Zusammenhangs zwischen der Normalkraft $F_N$ und der Eindrucktiefe $d$. Vor deren genauer Berechnung soll zunächst nur eine qualitative Analyse erfolgen, die zum grundlegenden Verständnis der auftretenden Phänomene beiträgt. Die Oberflächen der Kontaktpartner seien glatt und für die jeweiligen deformierbaren Teile sei linear-elastisches Verhalten angenommen.

### Aufgabe 1: Normalkontakt eines dünnen zylindrischen Aufklebers

Bestimmen Sie näherungsweise die $F_N$-$d$-Relation für den Kontakt zwischen einem dünnen zylindrischen, elastischen Aufkleber (Zylinderkappe vom Radius $R$, der Dicke $l_0 \ll R$ und der Länge $L$) und einer starren, ebenen Platte mittels Integration der Druckverteilung über die Kontaktfläche. Dabei soll die Form des Aufklebers durch eine Funktion 2. Grades angenähert werden. Benennen Sie die von Ihnen getroffenen Annahmen. Verwenden Sie den Modul der einachsigen Kompression

$$\tilde{E} := \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E. \tag{1}$$

**Zusatzaufgabe (für Fans der Elastizitätslehre):** Leiten Sie den Ausdruck (1) für den Modul der einachsigen Kompression aus dem allgemeinen dreidimensionalen Hookeschen Gesetz her.

### Aufgabe 2: Qualitative Abschätzung für den zylindrischen Kontakt

Bestimmen Sie näherungsweise die $F_N$-$d$-Relation für einen elastischen Zylinder (Radius $R$, Länge $L$) der seitlich in Kontakt mit einer starren Platte gebracht wird (siehe Abb. 1), indem Sie als Abschätzung von einer konstanten Dehnung im Kontaktgebiet ausgehen, deren Größe mit Hilfe des maßgeblich deformierten Volumens abgeschätzt werden soll. Die Form des Zylinders ist durch eine Funktion 2. Grades anzunähern.

Was ändert sich an der Abschätzung, wenn man berücksichtigt, dass die vertikale Verschiebung der Punkte im Kontakt von der Koordinate $x$ abhängt?

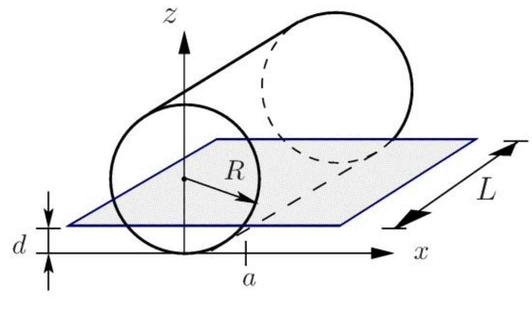


**Abb. 1 Modell für den Kontakt zwischen einem elastischen Zylinder und einer starren Ebene**

**Lösung Aufgabe 1**

Es werden folgende Annahmen für die Abschätzung getroffen:

- $d \ll l_0 \ll a \ll R$
- daher einachsige Kompression

Das Profil des zylindrischen Aufklebers kann dann durch

$$f(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2} \approx \frac{x^2}{2R} \tag{2}$$

beschrieben werden. In der parabolischen Näherung lautet daher die Deformation wie folgt:

$$\varepsilon_{zz}(x) = \frac{\Delta l(x)}{l_0} = \frac{1}{l_0}\left(\frac{x^2}{2R} - d\right). \tag{3}$$

Die halbe Kontaktbreite beträgt

$$a = \sqrt{2Rd}. \tag{4}$$

Die Normalkraft kann durch direkte Integration der Druckverteilung ermittelt werden:

$$F_N = \int p\,\mathrm{d}A = \frac{2\tilde{E}L}{l_0}\int_0^{\sqrt{2Rd}}\left(d - \frac{x^2}{2R}\right)\mathrm{d}x = \frac{4\tilde{E}L}{3l_0}\sqrt{2R}\,d^{3/2}. \tag{5}$$

**Zusatz: Bestimmung des Moduls der einachsigen Kompression**

Die Aufgabe kann abstrakt mithilfe des Hookeschen Gesetzes gelöst werden. Die Normalspannungskomponente in Richtung der Deformation ist durch

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right), \tag{6}$$

mit den beiden Lamé-Konstanten $G$ und $\lambda$ , gegeben. Unter Berücksichtigung der Unterdrückung der Querdehnungen,

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0, \tag{7}$$

führt das auf folgenden Ausdruck für den Modul der einachsigen Kompression:

$$\tilde{E} = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = 2G + \lambda. \tag{8}$$

Schreibt man die beiden Lamé-Konstanten mithilfe des E-Moduls und der Poissonzahl aus, ergibt sich

$$\tilde{E} = \frac{E}{1+\nu}\left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E. \tag{9}$$

Eine alternative Lösung kann aus dem Gleichungssystem der Zugdeformation

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} &= \sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) \\ E\varepsilon_{yy} &= \sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right) \\ E\varepsilon_{zz} &= \sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

erhalten werden. Auflösung dieses Systems unter Berücksichtigung von (7) liefert

$$\sigma_{xx} = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E\varepsilon_{xx} \tag{11}$$

und damit offensichtlich den gleichen Modul wie in Gleichung (9).

**Lösung Aufgabe 2**

Die halbe Kontaktbreite beträgt abgeschätzt

$$a \simeq \sqrt{2Rd}. \tag{12}$$

Das wesentlich deformierte Gebiet ist ein Quader mit der Länge $L$ sowie der Höhe und der Breite $2a$. Die (als konstant abgeschätzte) Deformation in diesem Gebiet ist

$$\varepsilon_{zz} \simeq -\frac{d}{2a} \simeq -\sqrt{\frac{d}{8R}}. \tag{13}$$

Damit ergibt sich für den Druck im Kontakt

$$p \simeq E\sqrt{\frac{d}{8R}} \tag{14}$$

und die Normalkraft

$$F_N \simeq 2aLp \simeq EdL. \tag{15}$$

Wenn man „berücksichtigt“, dass die Verschiebung im Kontaktgebiet nicht konstant ist, erhält man die nur unwesentlich andere (und in keiner Weise „korrektere“) Abschätzung

$$F_N \simeq \frac{EL}{2\sqrt{2Rd}} \int_0^{\sqrt{2Rd}} \left( d - \frac{x^2}{2R} \right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3} EdL. \tag{16}$$