5. Vorlesung Kontaktmechanik und Reibungsphysik

Thema: Rigorose Behandlung des Normalkontaktproblems mit Adhäsion

---

- Lösung des Hertzschen Kontaktes mit Adhäsion:
  Johnson, Kendall & Roberts (1971) (JKR-Theorie)
- beruht auf 3 Ideen

1. Idee: Die Starrkörper-Anhebung

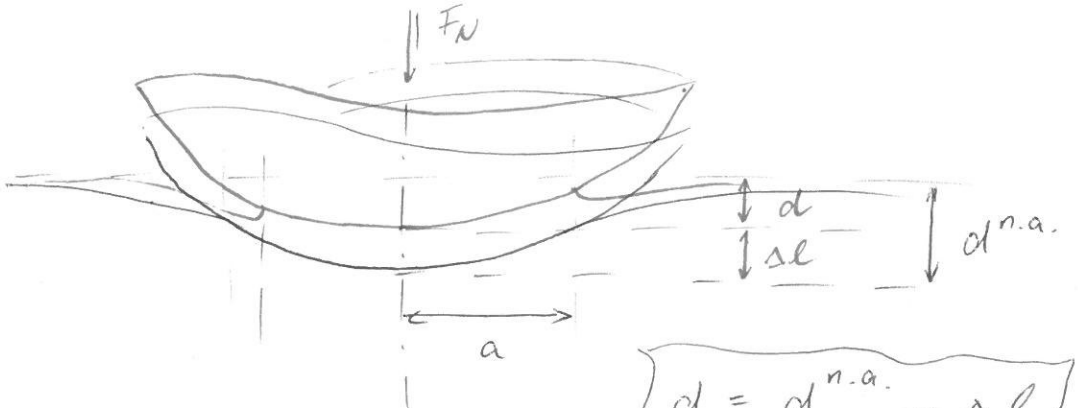
- die Normalverschiebung im Kontaktgebiet ist auch im adhäsiven Kontakt durch die Indenterform vorgegeben

$$u_z = d - \frac{r^2}{2R} \quad , \quad r \le a$$

→ der adhäsive Kontakt kann folgendermaßen konstruiert werden

1: der Indenter wird ohne Berücksichtigung der Adhäsion bis zum Kontaktradius a eingedrückt

2: anschließend wird das Kontaktgebiet als Ganzes um Δl angehoben



$$\boxed{d = d^{n.a.} - \Delta l}$$

- die nicht-adhäsive Lösung (Hertz)

$$d^{n.a.} = \frac{a^2}{R}, \quad F_N^{n.a.} = \frac{4}{3}E^* \frac{a^3}{R}, \quad U_{el}^{n.a.} = \frac{8}{15}E^* \frac{a^5}{R^2}$$

- die elastische Energie nach der Anhebung:

$$U_{el} = U_{el}^{n.a.} - \int_0^{\Delta l} \left(F_N^{n.a.} - 2E^* x \cdot a\right) dx$$

$$= U_{el}^{n.a.} - F_N^{n.a.} \Delta l + E^* a \Delta l^2 \qquad \Delta l = \frac{a^2}{R} - d$$

$$= \frac{8}{15} E^* \frac{a^5}{R^2} - \frac{4}{3} E^* \frac{a^3}{R} \left(\frac{a^2}{R} - d\right) + E^* a \left(\frac{a^2}{R} - d\right)^2$$

$$= \underline{\underline{E^* \frac{a^5}{5R^2} - \frac{2}{3} E^* \frac{d a^3}{R} + E^* a d^2}}$$

2. Idee: Die Oberflächenenergie

$$U_{adh} = -\pi a^2 \gamma_{12}$$

$$U_{tot} = U_{el} + U_{adh}$$

3. Idee: Das Gleichgewicht entspricht einem Minimum der Gesamtenergie bei konstanter Eindrucktiefe d

$$\left.\frac{\partial U_{tot}}{\partial a}\right|_{d = \text{konst.}} = E^* \frac{a^4}{R^2} - 2E^* \frac{d a^2}{R} + E^* d^2 - 2\pi a \gamma_{12} \overset{!}{=} 0$$

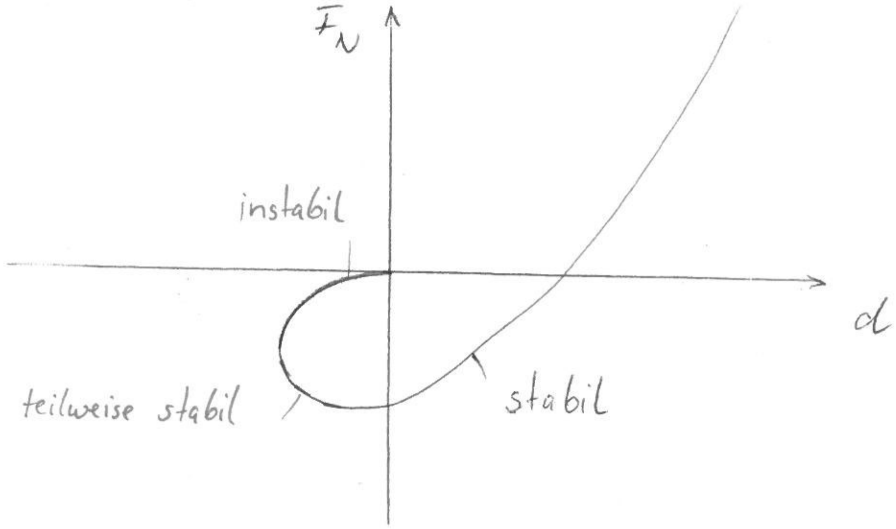
$$\Leftrightarrow E^* \left(\frac{a^2}{R} - d\right)^2 = 2\pi a \gamma_{12}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d = \frac{a^2}{R} \pm \sqrt{\frac{2\pi a \gamma_{12}}{E^*}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta l = \oplus \sqrt{\frac{2\pi a \gamma_{12}}{E^*}}}$$

Die Lösung des Kontaktproblems

$$d = \frac{a^2}{R} - \sqrt{\frac{2\pi a \gamma_{12}}{E^*}}$$

$$F_N = \frac{4}{3} E^* \frac{a^3}{R} - \sqrt{8\pi a^3 \gamma_{12} E^*}$$



- Minimum der Normalkraft:

$$\frac{dF_N}{da} = 4E^* \frac{a^2}{R} - \frac{3}{2}\sqrt{8\pi a \gamma_{12} E^*} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{64}{9} E^* \frac{a_c^4}{R^2} = 8\pi a_c \gamma_{12}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_c^3 = \frac{9\pi R^2 \gamma_{12}}{8E^*}}$$

$$F_c = \frac{3\pi}{2}\gamma_{12} R - 3\pi \gamma_{12} R = -\frac{3\pi}{2}\gamma_{12} R$$

$$\Rightarrow \boxed{F_A = \frac{3\pi}{2}\gamma_{12} R}$$ (maximale Adhäsionskraft)