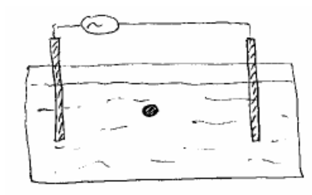
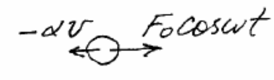
Prof. Popov SS 2017 Colloquium Mechanik für Fortgeschrittene II Aufgaben vom 12.05.2017



Aufgabe 1: Ein kleines, elektrisch geladenes Kügelchen befindet sich in einer viskosen Flüssigkeit in einem periodischen elektrischen Feld. Nehmen Sie an, dass die auf das Kügelchen wirkende viskose Kraft proportional zur Geschwindigkeit ist und die elektrische Kraft ist gleich $F_0 \cos \omega t$. Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit unter der Annahme, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ das Kügelchen ruhte ($v(0) = 0$).



Mechanischer Hinweis: Benutzen Sie das 2. Newtonsche Gesetz in der Form $m\dot{v} = \text{Summe aller Kräfte}$.

Mathematischer Hinweis 1: Beweisen Sie und benutzen Sie die folgende Identität:

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v \equiv e^{-\gamma t} \frac{d}{dt}\left(v e^{\gamma t}\right).$$

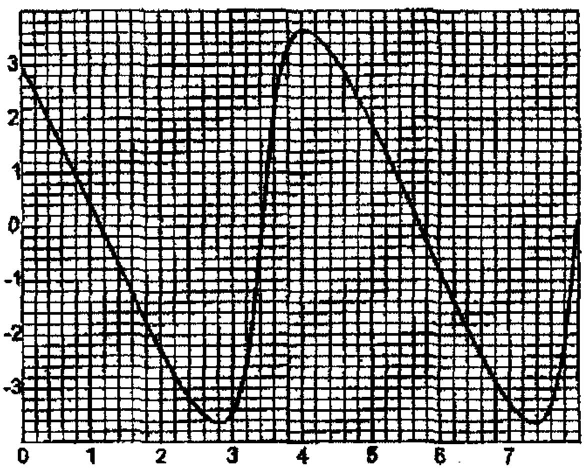
Mathematischer Hinweis 2: $\int e^{\gamma t} \cos \omega t dt = \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^2 + \omega^2}\left(\gamma \cos \omega t + \omega \sin \omega t\right)$.

Aufgabe 2: Abhängigkeit der Schwingungsperiode von der Amplitude.
Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Schwingungs- bzw. Umlaufperiode von der Amplitude für folgende Kraftgesetze: $F = -cx$, $F = -kx^3$, $\left|\vec{F}\right| = \frac{A}{r^2}$, $\left|\vec{F}\right| = \frac{A}{r^3}$.

Aufgabe 3. Ein Körper wird unter dem Winkel $\alpha = 45°$ zum Horizont geworfen. Zu bestimmen ist das Bewegungsgesetz und die Bahnform unter Berücksichtigung der Widerstandskraft. Nehmen Sie an, dass die Widerstandskraft proportional zur Geschwindigkeit ist.
[Lösung: $\tilde{y} = \xi \ln(1-\tilde{x}) + \tilde{x}(1+\xi)$;

$\xi = \frac{mg}{\gamma v_{x0}}$; $x = \frac{m}{\alpha} v_{x0}\tilde{x}$; $y = \frac{m}{\alpha} v_{x0}\tilde{y}$.]

Aufgabe 4: Planetenbewegung
Zwei Planeten bewegen sich gleichsinnig auf kreisförmigen Bahnen um einen Stern der Masse M. Im nachfolgenden Graphen ist der Winkelabstand eines Planeten vom Stern (in willkürlichen Einheiten) in Abhängigkeit von der Zeit aus der Sicht eines Beobachters auf dem anderen Planeten dargestellt.



a) Bestimmen Sie das Verhältnis der Bahnradien beider Planeten mit zwei unterschiedlichen Methoden.

b) Welche Einheit ist auf der vertikalen Achse des Graphen aufgetragen?

c) Bestimmen Sie die Bahnradien der beiden Planeten unter der Annahme, dass eine Einheit auf der horizontalen Achse genau ein Jahr beträgt.

Daten: M = $2 \cdot 10^{30}$ kg, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$

Die Massen m_1 und m_2 der Planeten sind sehr klein im Vergleich zu M. Alle drei Himmelskörper befinden sich zu jedem Zeitpunkt in einer gemeinsamen Ebene.