

Erzwungene Schwingungen (eine beliebige Kraft)

Die Bewegungsgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t)$ kann auch bei beliebiger äußerer Kraft $F(t)$ in allgemeiner Form integriert werden. Das ist leicht auszuführen, wenn man die Gleichung zunächst in der Form

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega_0 x) - i\omega_0(\dot{x} + i\omega_0 x) = \frac{1}{m} F(t) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt} \xi - i\omega_0 \xi = \frac{1}{m} F(t) \quad (1)$$

schreibt, wo die komplexe Größe

$$\xi = \dot{x} + i\omega_0 x \quad (2)$$

eingeführt worden ist. Die Gleichung (1) ist nicht mehr von zweiter, sondern nur noch von erster

Ordnung. Indem wir die Identität $\frac{d\xi}{dt} - i\omega_0 \xi = e^{i\omega_0 t} \frac{d}{dt} (e^{-i\omega_0 t} \xi)$ benutzen und die Gleichung

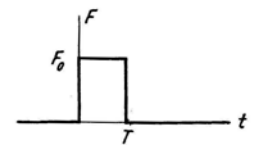
$$e^{i\omega_0 t} \frac{d}{dt} (e^{-i\omega_0 t} \xi) = \frac{1}{m} F(t) \quad \text{integrieren, erhalten wir}$$

$$\xi = e^{i\omega_0 t} \left\{ \int_0^t \frac{1}{m} F(t) e^{-i\omega_0 t} dt + \xi_0 \right\} \quad (3)$$

hierin ist die Integrationskonstante ξ_0 so gewählt, dass sie den Wert von ξ im Zeitpunkt $t = 0$ darstellt. Das ist die gesuchte allgemeine Lösung; die Funktion $x(t)$ ergibt sich als Imaginärteil des Ausdrucks (3) (geteilt durch ω_0)¹.

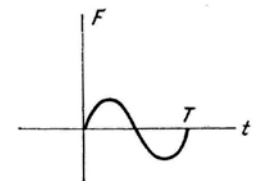
Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Schwingungsamplitude eines Systems nach Einwirkung einer äußeren Kraft F_0 , die während einer begrenzten Zeit T wirkt.

Hinweise: 1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung (3) die Variable ξ zum Zeitpunkt $t = T$

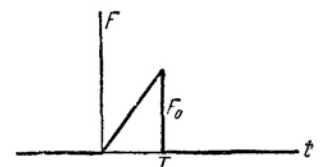


2. Daraus könnten Sie die Werte $x(T)$ und $v(T)$ bekommen, brauchen dies aber nicht zu machen, da die Schwingungsamplitude $a = \sqrt{x(T)^2 + v(T)^2} / \omega_0^2 = |\xi| / \omega_0$ sich durch den Betrag der komplexen Zahl ξ ausdrückt.

Aufgabe 2: Dasselbe für den Fall, dass sich die Kraft in der Zeit von Null bis $T = 2\pi / \omega_0$ nach dem Gesetz $F = F_0 \sin \omega_0 t$ ändert.



Aufgabe 3: Dasselbe für den Fall, dass sich die Kraft wie im Bild rechts skizziert ändert.



Aufgabe 4: Bestimmen Sie die erzwungenen Schwingungen bei Anwesenheit von geschwindigkeitsproportionaler Reibung unter der Wirkung der äußeren Kraft $F = F_0 e^{\alpha t} \cos \Omega t$.

¹ Dabei muss die Kraft $F(t)$ natürlich in reeller Form geschrieben werden.