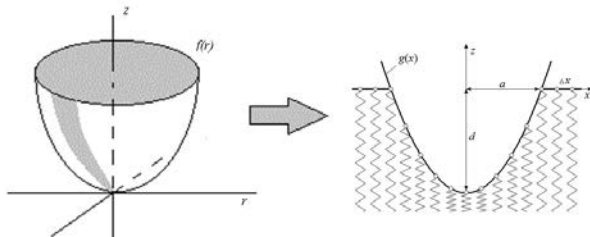


Kontaktmechanik mit der Methode der Dimensionsreduktion (MDR)

Lit.: V.L. Popov, M. Heß, „Methode der Dimensionsreduktion“, Springer, 2013 (In Uni-Bibliothek als Hardcover und E-Book vorhanden)

Kontakt zwischen Körpern wird mathematisch durch 3D-Integralgleichungen beschrieben. Es gibt aber eine Möglichkeit sie in 1D algebraische Form zu bringen: durch Anwendung der *Methode der Dimensionsreduktion*.

Fragestellung: Ein starres rotationssymmetrisches Profil $z = f(r)$ sei in einen elastischen Körper mit der Normalkraft F_N um eine Indentierungstiefe d eingedrückt; den Kontaktradius sei a . Gesucht wird der Zusammenhang zwischen F_N , d und a sowie die Spannungsverteilung im Kontakt.



Lösungsschritte der MDR:

I. Man definiert ein „MDR-transformiertes“ eindimensionales Profil

$$g(x) = |x| \int_0^{|x|} \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr$$

Die Rücktransformation lautet $f(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{g(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$.

Beispiele für die MDR-Transformation

Für eine beliebige Potenzfunktion

$$f(r) = c_n r^n \text{ gilt}$$

$$g(x) = \kappa_n c_n |x|^n, \text{ wobei } \kappa_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})};$$

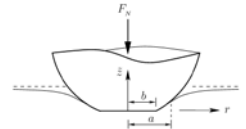
$\Gamma(n) := \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$ ist die Gamma-Funktion.

MDR-Transformierte für einfache Profile

$f(r)$	$\begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r > a \end{cases}$	$r^2 / 2R$	$r \tan \theta$
$g(x)$	$\begin{cases} 0, & x < a \\ \infty, & x > a \end{cases}$	x^2 / R	$\frac{\pi}{2} x \tan \theta$

Als ein weniger triviales Beispiel betrachten wir den Kontakt eines *parabolischen Profils mit verschlissener Spitze*:

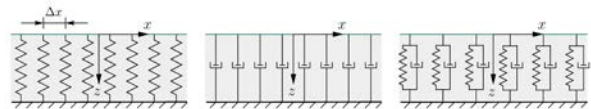
$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq r < b \\ \frac{r^2 - b^2}{2R} & \text{für } b \leq r \leq a \end{cases}$$



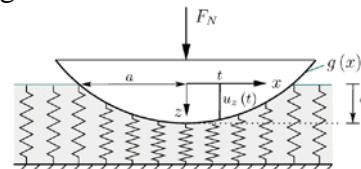
Das MDR-transformierte Profil ist gleich

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq |x| < b \\ \frac{|x|}{R} \sqrt{x^2 - b^2} & \text{für } b \leq |x| \leq a \end{cases}$$

II. Das 1D-Profil wird nun um die Indentierungstiefe d in eine *Winklersche Bettung* eingedrückt. Diese besteht aus einer Reihe von unabhängigen Federn mit dem Abstand Δx , Normalsteifigkeit $k_z = E^* \Delta x$ und Tangentialsteifigkeit $k_{zx} = G^* \Delta x$, wobei $E^* = E / (1 - \nu^2)$ und $G^* = 4G / (2 - \nu)$, E ist der Elastizitätsmodul, G Schubmodul und ν die Querkontraktionszahl des Mediums. Viskosität η wird durch Dämpferelemente mit der Dämpfungskonstante $\Delta \gamma = 4\eta \Delta x$ abgebildet.



III. Das eindimensionale Profil wird nun mit der Normalkraft F_N in die elastische Bettung eingedrückt:



Die Oberflächennormalverschiebung an der Stelle x innerhalb des Kontaktgebietes ist gleich $u_z(x) = d - g(x)$. Am Rand des nicht-adhäsiven Kontaktes $x = \pm a$ wird sie Null: $u_z(\pm a) = 0 \Rightarrow d := g(a)$.

Die Kraft einer Feder an der Stelle x ist proportional der Verschiebung an dieser Stelle: $\Delta F_z(x) = \Delta k_z u_z(x) = E^* u_z(x) \Delta x$ und die Summe aller Federkräfte ist die Normalkraft:

$$F_N := E^* \int_{-a}^a u_z(x) dx = 2E^* \int_0^a (d - g(x)) dx$$

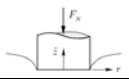
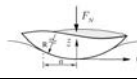
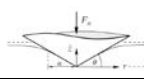
Definieren wir noch die Streckenlast $q_z(x)$:

$$q_z(x) := \frac{\Delta F_z(x)}{\Delta x} = E^* u_z(x)$$

Die Druckverteilung im ursprünglichen 3D System bestimmt sich laut:

$$p(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{q'(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx.$$

Beispiele für Normalkontakte:

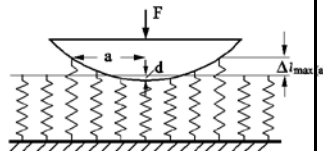
			
a	a	\sqrt{Rd}	$\frac{2}{\pi} \frac{d}{\tan \theta}$
F_N	$2aE^*d$	$\frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2}$	$\frac{2}{\pi} E^* \frac{d^2}{\tan \theta}$

Beispiele für Druckverteilungen:

- Zylinder: $p(r) = \frac{E^*d}{\pi a} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-1/2}$
- Kugel: $p(r) = \frac{2E^*}{\pi} \left(\frac{d}{R}\right)^{1/2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}$
- Kegel: $p(r) = \frac{E^*}{2} \tan \theta \cdot \ln \left(\frac{a}{r} + \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 1}\right)$

IV. In einem *adhäsiven Kontakt* werden die Federn am Rande des Kontaktes abspringen wenn die Auslenkung der Feder den kritischen Wert

$$\Delta l_{\max}(a) = \sqrt{\frac{2a\pi\gamma_{12}}{E^*}}$$

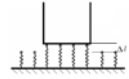
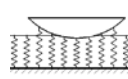
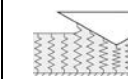


übersteigt, wobei γ_{12} die Trennungsarbeit pro Flächeneinheit ist. Der kritische Kontaktradius im Moment des Ablösens ist gleich

$$\left. \frac{dg(a)}{da} \right|_{a=a_c} = \sqrt{\frac{9\pi\Delta\gamma}{2a_c E^*}}$$
 und die Adhäsionskraft gleich

$$F_A = 2E^* \left[a_c \Delta l_{\max}(a_c) - \int_0^{a_c} xg'(x) dx \right].$$

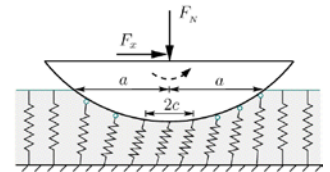
Beispiele für adhäsive Normalkontakte

			
a_c	a	$\left(\frac{9\pi\Delta\gamma R^2}{8E^*}\right)^{1/3}$	$\frac{18\Delta\gamma}{\pi E^* \tan^2 \theta}$
F_A	$\sqrt{8\pi a^3 E^* \Delta\gamma}$	$\frac{3}{2} \pi \Delta\gamma R$	$\frac{54\Delta\gamma^2}{\pi \tan^3 \theta \cdot E^*}$

V. Betrachten wir einen axialsymmetrischen Indenter, der zunächst mit einer Normalkraft F_N in den elastischen Halbraum gedrückt und anschließend durch eine Tangentialkraft F_x in x -Richtung beansprucht wird. Bei kleiner Tangentialkraft entsteht am Rande des Kontaktgebietes ein ringförmiges Gleitgebiet, welches sich bei steigender Kraft nach Innen ausbreitet bis das vollständige Gleiten einsetzt. Den Radius des Haftgebietes bezeichnen wir durch c .

Anwendung der MDR:

In einem Tangentialkontakt mit dem Reibungskoeffizienten μ sind die Federn im Haftzustand wenn



$$|k_x u_x| < \mu k_z u_z.$$

Der Radius des Haftgebietes bestimmt sich aus der Gleichung $G^* u_x^{(0)} = \mu E^* (d - g(c))$.

Maximale Verschiebung bis zum Beginn des Gleitens wird nur durch die Eindringtiefe bestimmt und ist unabhängig von der Form des Indenters:

$$u_{x,\max} = \mu d (E^* / G^*) \approx 1.2 \cdot \mu d.$$

Der Zusammenhang zwischen der Tangentialkraft und Haftradius wird gegeben durch

$$\frac{F_x}{\mu F_N} = \frac{\int_c^a xg'(x) dx}{ag(a) - \int_0^a g(x) dx}.$$

Beispiele für Tangentialkontakte

1. Zylinder: Kein Gleitgebiet. Das Gleiten beginnt sofort in der gesamten Kontaktfläche.

2. Kugel: $u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} \left(d - \frac{c^2}{R}\right), \frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^3.$

3. Kegel: $u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} \left(d - \frac{\pi}{2} c \tan \theta\right),$

$$\frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

4. Potenzprofil $f(r) = c_n r^n.$

$$u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} \left(d - \kappa_n c_n c^n\right), \frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^n.$$

Weiterführende Literatur:

http://www.reibungsphysik.tu-berlin.de/menu/forschung/method_of_dimensionality_reduction/
 Videoaufzeichnung der VL: <https://vimeo.com/86873978>