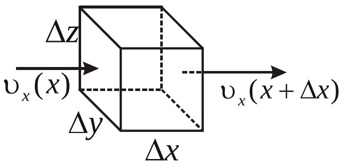
Kontinuumsmechanik / Prof. Popov / Vorlesung 16

Bewegungsgleichung einer idealen Flüssigkeit, viskose Flüssigkeiten, Navier-Stokes-Gleichung

Lit.: Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4“, Kapitel 1.3.3.1, 1.3.3.3

I. Kontinuitätsgleichung dreidimensional

Betrachten wir ein infinitesimal kleines Flüssigkeitsvolumen und berechnen, wie viel Flüssigkeit innerhalb des Zeitintervalls Δt ein- und ausfließt.



Massenein-/Ausfluss in der Zeit Δt:

ein	aus
$\rho(x)\cdot\Delta y\Delta z\cdot v_x(x)\Delta t$	$\rho(x+\Delta x)\cdot\Delta y\Delta z\cdot v_x(x+\Delta x)\Delta t$

$$\Delta M_{(x)} = -\Delta y\Delta z\Delta t\left[\frac{\rho(x+\Delta x)v_x(x+\Delta x)-\rho(x)v_x(x)}{\Delta x}\right]\Delta x =$$

$$-\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\,\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}$$

$$\Delta M_{(voll)} = -\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]$$

$$\Delta\rho = \frac{\Delta M}{V}$$

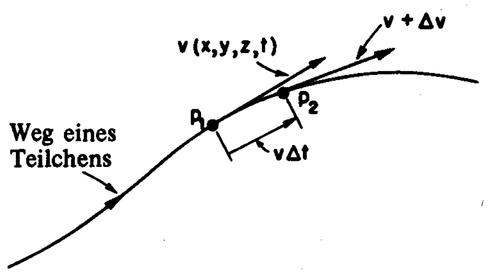
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}-\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}-\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\mathrm{div}(\rho\vec v)$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho\vec v)}$$

II. Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit

Das 2. Newtonsche Gesetz lautet

$$\rho\cdot(Beschleunigung) = -\nabla p+\rho\vec g+\vec f_{\text{visk}}$$



Die Geschwindigkeitsänderung eines Teilchens:

$$\vec v(x+dx,y+dy,z+dz,t+dt)-\vec v(x,y,z,t) =$$

$$= \frac{\partial\vec v}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec v}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec v}{\partial z}dz+\frac{\partial\vec v}{\partial t}dt =$$

$$= \frac{\partial\vec v}{\partial x}v_x dt+\frac{\partial\vec v}{\partial y}v_y dt+\frac{\partial\vec v}{\partial z}v_z dt+\frac{\partial\vec v}{\partial t}dt$$

$$d\vec v = \frac{\partial\vec v}{\partial t}dt+(\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v dt$$

$$Beschleunigung = \frac{\partial\vec v}{\partial t}+(\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v\,.$$

Das 2. N.G. für eine Flüssigkeit ohne Viskosität hat also die Form

$$\boxed{\frac{\partial\vec v}{\partial t}+(\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v = -\frac{\nabla p}{\rho}+\vec g}$$

In einem lokalen Koordinatensystem mit der *x*-Achse parallel zur Stromlinie sieht diese Gleichung so aus:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial p/\partial x}{\rho}-\frac{\partial(gh)}{\partial x}\,.$$

Für stationäre Strömungen

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial p/\partial x}{\rho}-\frac{\partial(gh)}{\partial x} \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v_x^2}{\partial x} = -\frac{\partial p/\partial x}{\rho}-\frac{\partial(gh)}{\partial x}\,.$$

Für inkompressible Medien folgt daraus

$$\frac{v_x^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gh = const \qquad \text{(Bernoulli-Gleichung)}$$

Für kompressible Medien

$$\frac{v_x^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+gh = const\,.$$

III. Dynamische Gleichung für eine ebene Strömung einer viskosen Flüssigkeit

$$\boxed{\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial y} = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

IV. Viskose Kraft im allgemeinen Fall

$$\vec f = \eta\left(\frac{\partial^2\vec v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec v}{\partial z^2}\right) = \eta\Delta\vec v$$

und die Bewegungsgleichung nimmt die Form an:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec v}{\partial t}+(\vec v\cdot\nabla)\vec v\right) = -\nabla p+\rho\vec g+\eta\Delta\vec v}$$

Navier-Stokes-Gleichung für eine inkompressible viskose Flüssigkeit.