Schall in Flüssigkeiten und Gasen

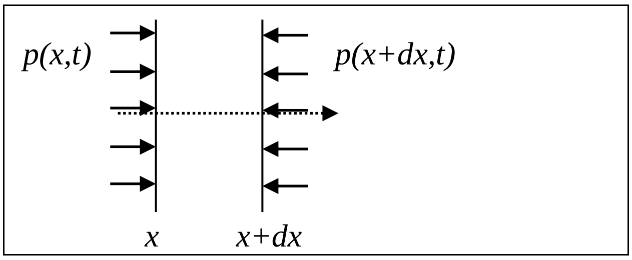
I. Wellengleichung

Die Ursache für Schallausbreitung ist die Abhängigkeit des Druckes von der Dichte $p = p(\rho)$: eine heterogene Verschiebung verursacht eine Änderung der Dichte $\Rightarrow$ diese verursacht eine nicht homogene Druckverteilung $\Rightarrow$ diese bewirkt eine Bewegung. Die Druckänderungen bei Schallausbreitung sind meistens sehr klein: Einem starken Schall mit der Intensität 60dB entspricht eine Druckamplitude von $2\cdot 10^{-7}$ bar. Für die kleinen Druckänderungen gilt

$$p(\rho_0+\Delta\rho) = p(\rho_0) + \left(\frac{dp}{d\rho}\right)\Delta\rho$$

$$p(\rho_0)+\Delta p = p(\rho_0)+\kappa\Delta\rho, \quad \boxed{\Delta p = \kappa\Delta\rho}$$

Betrachten wir eine ebene Welle, die sich in Richtung der x-Achse ausbreitet und innerhalb dieser ein infinitesimal kleines Volumenelement mit Länge dx und Fläche A.



Die Verschiebung aus dem Gleichgewichtszustand bezeichnen wir durch $u(x,t)$.

Wegen der Massenerhaltung gilt

$$\rho_0\Delta x = \rho(t)\left(\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right) =$$

$$(\rho_0+\Delta\rho)\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x = \Delta x\cdot\left(\rho_0+\Delta\rho+\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Daraus folgt $\boxed{\Delta\rho = -\rho_0\dfrac{\partial u}{\partial x}}$.

Die Bewegungsgleichung lautet

$$dm\cdot\ddot{u} = A\big(p(x)-p(x+dx)\big) = -A\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

oder $\boxed{\rho_0\ddot{u} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}}$. $\Rightarrow$

$$\rho_0\ddot{u} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa\frac{\partial \rho}{\partial x} = \kappa\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

oder $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$.

Das ist eine Wellengleichung mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $\boxed{c = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\partial p/\partial\rho}}$.

II. Schallgeschwindigkeit

*Berechnung von Newton (**nicht korrekt!**)*

Für Gase gilt $p = nkT = \dfrac{\rho kT}{m}$. Aus der kinetischen Gastheorie ist bekannt, dass $kT = \dfrac{1}{3}m\left\langle v^2\right\rangle$. Somit $p = \dfrac{1}{3}\rho\left\langle v^2\right\rangle$.

$$c = \sqrt{\partial p/\partial\rho} = \sqrt{\left\langle v^2\right\rangle/3}.$$

Korrekte Berechnung

In Wirklichkeit erwärmt sich das Gas beim Komprimieren und deshalb gilt $p = const\cdot\rho^\gamma$. Für Moleküle, die aus zwei Atomen bestehen, ist $\gamma = 1.4$. Das heißt

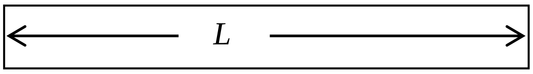
$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{3}\left\langle v^2\right\rangle.$$

Die Schallgeschwindigkeit ist

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{3}\left\langle v^2\right\rangle} \approx 0.7\sqrt{\left\langle v^2\right\rangle}.$$

III. Eigenfrequenzen

Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen eines an beiden Seiten geschlossenen Rohres.



Lösung: Wir lösen die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit den Randbedingungen

$u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$

mit Hilfe des Bernoulli-Ansatzes

$u(x,t) = A\cos\omega t\cdot\sin kx$,

wobei die Randbedingung am linken Rand bereits berücksichtigt wurde. Das Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert $\omega^2 = c^2k^2$.

Die zweite Randbedingung liefert

$\sin(kL) = 0 \;\Rightarrow\; kL = \pi n \;\Rightarrow\; k = \pi n/L \;\Rightarrow$

$$\boxed{\omega = \pi cn/L}$$

IV. Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen eines **auf einer Seite offenen Rohres**.

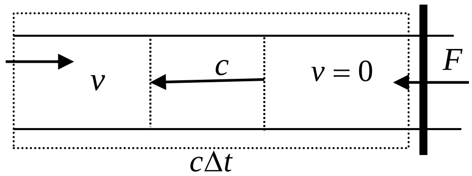
Lösung: Am offenen Ende des Rohres ist der Druck ungefähr gleich dem atmosphärischen Druck und der Überdruck Null. Aus

$$\Delta\rho = -\rho_0\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{folgt} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0\cdot$$

Die gleiche Aufgabe wie oben ist nun mit einer geänderten Randbedingung zu lösen $\Rightarrow$ $\cos(kL) = 0$, $kL = \pi/2 + \pi n$.

V. Hydrodynamischer Schlag

Die Strömung in einem Rohr muss schnell durch einen Absperrschieber aufgehalten werden. Welcher Druck wirkt dabei auf den Schieber?



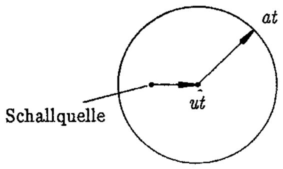
Die Änderung des Impulses des Kontrollvolumens ist $\Delta P = 0 - \rho A c \Delta t v$. Nach dem Impulssatz gilt $\Delta P / \Delta t = -\rho v c A = -F$. Der Druck ist demnach

$$\boxed{p = F / A = \rho v c}.$$

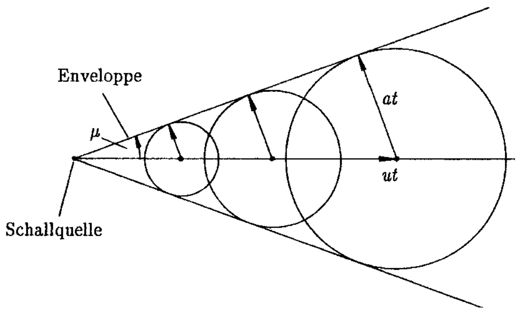
Z.B. für Wasser bei $v = 1 m/s$ ist $p = 10^3 10^3 = 1 \mathrm{MPa} = 10$ bar.

VI. Überschallströmungen

Wir betrachten eine stationäre Strömung (Geschwindigkeit u) mit einer ortsfesten Schallquelle, die zu einer bestimmten Zeit ein Signal aussendet. Bei $u < c$ sieht die Welle zum Zeitpunkt t wie folgt aus:



Für $t \to \infty$ wird die Schallwelle den gesamten Raum erreichen. Ist $u > c$, so ergibt sich die im nächsten Bild skizzierte Lage der Schallwelle. Für $t \to \infty$ wird die Schallwelle nicht den gesamten Raum erreichen.



Die einhüllende Kurve, deren halber Öffnungswinkel μ sich aus der Gleichung

$$\sin \mu = \frac{c}{u} = \frac{1}{M}$$

berechnet, nennt man den *Machschen Kegel*. Die Zahl $M = u / c$ ist die *Machsche Zahl*.

VII. Schallenergie, Energiestromdichte

Eine Welle mit der Kreisfrequenz ω hat die Form $x = x_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)$.

Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$v = v_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) = x_0 \omega \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right).$$

Die kinetische Energie pro Volumeneinheit ist $K / V = \frac{\rho}{2} x_0^2 \omega^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)$.

Der Mittelwert der kinetischen Energie:

$$\langle K / V \rangle = \frac{\rho}{4} x_0^2 \omega^2 .$$

Die Gesamtenergie bei kleinen Schwingungen ist das Zweifache der kinetischen Energie. Die gesamte *Energiedichte E* ist also

$$\boxed{E = 2 \langle K / V \rangle = \frac{\rho}{2} x_0^2 \omega^2}.$$

Diese Energie "fließt" mit der Schallgeschwindigkeit. Der *Energiefluss* (auch *Schallintensität*) ist deshalb gleich

$$\boxed{I = \frac{\rho}{2} x_0^2 \omega^2 c}$$

Für die Dichte ergibt sich

$$\Delta \rho = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} = \rho \frac{x_0 \omega}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) ,$$

und für den Druck

$$\Delta p = \kappa \Delta \rho = \kappa \rho \frac{x_0 \omega}{c} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) = \Delta p_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) .$$

Die Amplitude der Druckoszillationen ist

$$\Delta p_0 = \kappa \rho \frac{x_0 \omega}{c} .$$

Für die Intensität als Funktion der Druckamplitude erhalten wir

$$\boxed{I = \frac{\rho}{2} \frac{c^3 \Delta p_0{}^2}{\kappa^2 \rho^2} = \frac{\Delta p_0{}^2}{2 \rho c}}.$$

Ist die Druckamplitude größer als der mittlere Druck, so kann es zur Kavitation kommen.
Im Wasser ist dafür mindestens die Energiestromdichte $I = \frac{\Delta p_0{}^2}{2 \rho c} = \frac{\left(10^2\right)^2}{2 \cdot 10^3 10^3} = 5$ kW/m^2 erforderlich.

VIII. Relative Lautstärke

Zur Charakterisierung der Schallintensität wird eine dimensionslose Größe

$$J = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{p}{p_{\mathrm{ref}}}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_{\mathrm{ref}}}\right) \text{ dB}$$

(dB: *Dezibel*) benutzt, wobei $p_{\mathrm{ref}} = 2 \cdot 10^{-10}$ bar ein Referenzdruck ist. Unterscheiden sich zwei Intensitäten um das 10fache, so unterscheiden sich ihre relativen Lautstärken um 10 dB.