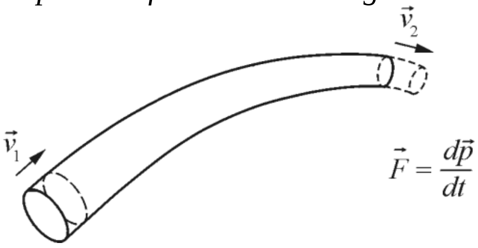
Lit.: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III" 26.4. Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4", Kapitel 1.3.2.4

I. Impulssatz

Impulssatz für eine Strömungsröhre:



$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

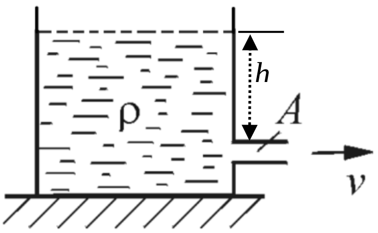
Die auf die ausgewählte Flüssigkeitsmenge (*Kontrollvolumen*) wirkende Kraft ist

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = J \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = J = \text{ Massenstrom}$$

II. Anwendungsbeispiele

Beispiel 1: Zu berechnen ist die auf das Gefäß wirkende Kraft.

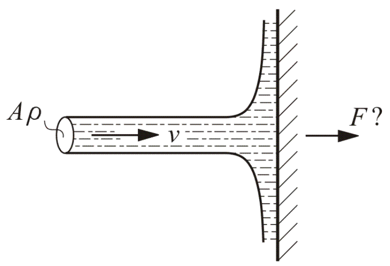


Lösung: Die auf das Wasser wirkende Kraft ist

$F_x = J(v-0) = \rho A v \cdot v = \rho A v^2$

Auf den Behälter wirkt nach dem 3. N.G. betragsmäßig die gleiche, aber entgegengesetzte Kraft $-\rho A v^2 = -2\rho g h A$.

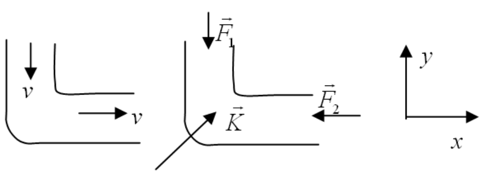
Beispiel 2: Zu berechnen ist die auf die Wand wirkende Kraft.



Lösung:

Die auf den Strahl wirkende Kraft ist gleich $J(0-v) = -A\rho v^2$. Die auf die Wand wirkende Kraft ist $F = A\rho v^2$.

Beispiel 3: Zu berechnen ist die auf ein gebogenes Rohr wirkende Kraft.



Lösung. Die auf das Kontrollvolumen wirkende Kraft ist gleich $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{K}$. Sie verursacht die Änderung des Impulses der Flüssigkeit in beide Richtungen.

x-Ri.: $Jv - 0 = -F_2 + K\cos 45° = -pA + K\cos 45°$

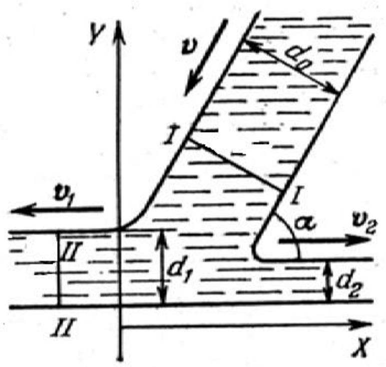
y-Ri.: $0 + Jv = -F_1 + K\sin 45° = -pA + K\sin 45°$

Daraus $K = \sqrt{2}\left(pA + Jv\right) = \sqrt{2}\left(pA + A\rho v v\right)$.

$$\boxed{K = \sqrt{2}A\left(p + \rho v^2\right)}$$

p ist hier der *Überdruck* in der Flüssigkeit.

Beispiel 4: Ein auf eine Wand fallender Wasserstrahl. Zu bestimmen sind die Dicken der Strahlarme, in die sich der Strahl teilt, entsprechende Strömungsgeschwindigkeiten und die auf die Wand wirkende Kraft.



Kontinuitätsgleichung:

$\rho d_0 v = \rho d_1 v_1 + \rho d_2 v_2$.

Da der Druck überall konstant ist, folgt aus der Bernoulli-Gleichung $v = v_1 = v_2$.

Daher ist $d_0 = d_1 + d_2$.

In der *x*-Richtung wirken keine Kräfte (ideale Flüssigkeit!). Daher bleibt die *x*-Komponente des Impulses erhalten: $mv\cos\alpha = m_1 v_1 - m_2 v_2$.

Da $m \sim d_0$, $m_1 \sim d_1$ und $m_2 \sim d_2$, folgt aus dem Impulserhaltungssatz $d_0\cos\alpha = d_1 - d_2$.

Daraus folgt: $\boxed{d_1 = d_0\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, $\boxed{d_2 = d_0\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

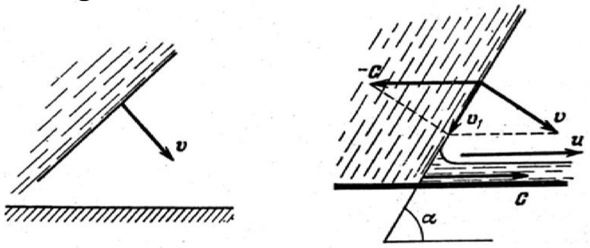
In der *y*-Richtung bleibt der Impuls nicht erhalten. Hier gilt der Impulssatz:

$$\boxed{F = Jv\sin\alpha = A\rho v^2\sin\alpha}$$

Der auf die Wand wirkende Druck ist

$p \approx \frac{F}{A} = \rho v^2 \sin\alpha$. Z.B. bei $\alpha = 90°$ und $v = 10 m/s$ ist $p \approx 10^3 10^2 = 10^5$ (gleich dem atmosphärischen Druck).

Beispiel 5: Kumulativer Strahl. Auf eine starre Ebene fällt ein Strahl mit der Geschwindigkeit v. α sei der Winkel zwischen der Front des fallenden Wassers und der Ebene. Zu bestimmen ist die Geschwindigkeit des entlang der Ebene strömenden Strahls.



Die Geschwindigkeit des Schnittpunktes der Front mit der Ebene bezeichnen wir als c.
Im Bezugssystem, das sich zusammen mit dem Schnittpunkt mit der Geschwindigkeit c bewegt, wird die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt: Der Strahl fällt auf die Ebene mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{c}$ und zerfällt in zwei Teile, die sich nach vorne und nach hinten mit der Geschwindigkeit v_1 bewegen. Aus dem Geschwindigkeitsdreieck folgt.

$$c = \frac{v}{\sin\alpha}, \quad v_1 = \frac{v}{\tan\alpha}.$$

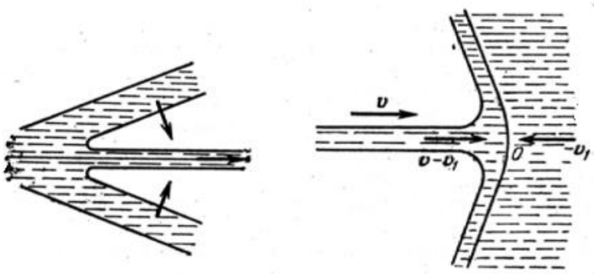
Im ursprünglichen Bezugssystem

$$u = c + v_1 = \frac{v}{\sin\alpha} + \frac{v}{\tan\alpha} = v\cot\frac{\alpha}{2}$$

Bei kleinen Winkeln gilt $\quad u \approx \dfrac{2v}{\alpha}$.

Die Geschwindigkeit des gebildeten Strahls kann um Vielfaches größer sein als die des fallenden!

Beispiel 6: Durchschlag einer Panzerplatte
Das oben beschriebene Phänomen wird zur Erzeugung von sehr schnellen Strahlen benutzt (z.B. für militärische Anwendungen). Was passiert, wenn ein schneller Strahl auf eine metallische Platte fällt?

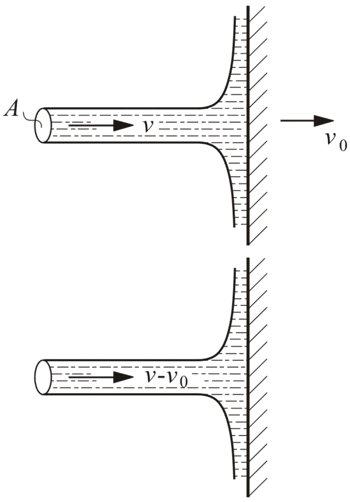


Metalle verhalten sich bei hohen Drucken wie Flüssigkeiten. Deshalb betrachten wir den Aufprall eines Strahls mit der Dichte ρ_0 auf eine Flüssigkeit mit der Dichte ρ. Der Strahl vertieft sich in das Volumen der Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v_1, die noch zu bestimmen ist. Im Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt, haben wir eine stationäre Strömung: von links mit der Geschwindigkeit $(v - v_1)$, von rechts mit der Geschwindigkeit $-v_1$. Der Druck im Staupunkt, berechnet auf zwei zusammentreffenden Stromlinien, ist $\rho_0 (v - v_1)^2 = \rho v_1^2$. Daraus folgt $v_1 = \dfrac{v}{1 + \sqrt{\rho/\rho_0}}$.

Z.B. bei gleichen Dichten $v_1 = v/2$, d.h. die "Durchschlaggeschwindigkeit" ist gleich der Hälfte der Strömungsgeschwindigkeit im Strahl. Der Strahl wird in die Flüssigkeit so lange eindringen, bis seine ganze Länge den Punkt O passiert hat. Dafür ist die Zeit $\tau = l/(v - v_1) = 2l/v$ notwendig. In dieser Zeit wird der Strahl die Wasserschicht mit der Dicke $L = \dfrac{v}{2}\tau = l$ "durchschlagen".

Die Dicke ist gleich der Länge des Strahls! Nach dem Durchschlag bewegt sich der Rest des Strahls mit der ursprünglichen Geschwindigkeit v!

Beispiel 7: Leistung eines auf eine Schaufel fallenden Strahls. Die Schaufel bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0.



Lösung: Im Bezugssystem, das sich mit der Schaufel bewegt, ist die Strahl-Geschwindigkeit $(v - v_0)$. Der Strahl wirkt auf die Schaufel mit der Kraft $F = A\rho(v - v_0)^2$. Die Leistung dieser Kraft (jetzt wieder im ursprünglichen Bezugssystem) ist

$$P = F \cdot v_0 = A\rho v_0 (v - v_0)^2.$$

Sie erreicht ein Maximum, wenn $dP/dv_0 = 0$. Daraus folgt $v_0 = v/3$: Um die maximale Leistung zu erzielen, muss die Geschwindigkeit der Schaufel 1/3 der Strahlgeschwindigkeit betragen.