Schwingungen von Membranen und Platten

I. Eigenfrequenzen der fest gelagerten Membran

$$\omega_{mn} = k_{mn} c = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

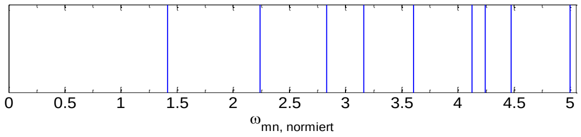


Bild 1. Verteilung von Eigenfrequenzen einer Membran bei $a = b$ normiert auf $\pi c/a$.

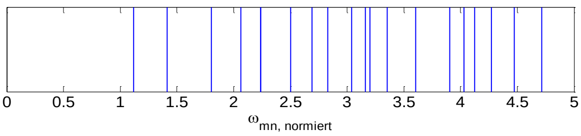
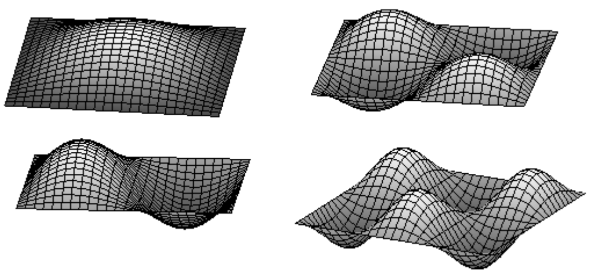


Bild 2. Dasselbe bei $b = 2a$ normiert auf $\pi c/a$.

Die Eigenfunktionen sind:

$$W_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a} \cdot \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Die ersten vier Eigenschwingungsformen:



<u>Eine weiterführende Bemerkung:</u> Die allgemeine Lösung der 2D-Wellengleichung kann nicht nur in der Form $w = \sin kx$, $w = \sin ky$ oder dem Produkt daraus gesucht werden, sondern auch in der allgemeineren Form $w = \sin(k_x x + k_y y) = \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})$. Den Vektor $\vec{k} = (k_x, k_y)$ nennt man *Wellenvektor*. Der Wellenvektor steht immer senkrecht zu den Linien konstanter Phase. Er gibt die Richtung der Wellenausbreitung an.

II. Plattenschwingungen

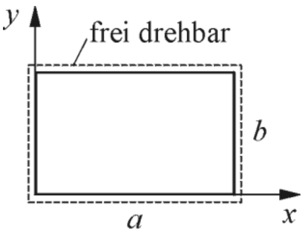
$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \Delta\Delta w = 0 \ ; \quad D = \frac{E h^3}{12\left(1 - \nu^2\right)}, \ (1)$$

h - Dicke, E - Elastischer Modul, ν - Poisson-Zahl, ρ - Dichte. Der Operator $\Delta\Delta$ entspricht einem zweimal nacheinander angewendeten Laplace-Operator:

$$\Delta\Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

<u>Beispiel</u>: Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen einer am Rand frei drehbar gelagerter Platte.



Benutzen wir gleich den Ansatz

$$W(x, yt) = F \sin\alpha x \cdot \sin\beta y \cos\omega t,$$

der die Randbedingungen bei $x = 0$ und $y = 0$ erfüllt.

Einsetzen in die Gleichung (1) liefert

$$-\rho\omega^2 + \frac{D}{h}\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2 = 0 . \quad \text{Daraus:}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

Aus den Randbedingungen folgt:

$$\alpha_m = \pi m/a \ , \quad \beta_n = \pi n/b \ , \ \text{und somit}$$

$$\omega_{n,m} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

Die ersten Eigenformen sind dieselben wie bei einer Membran, aber die Frequenzen sind verschieden.

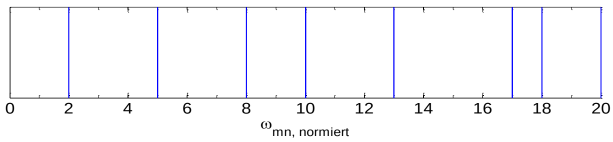


Bild 3. Verteilung von Eigenfrequenzen einer Platte bei $a = b$ normiert auf $\pi^2/a^2 \cdot \sqrt{D/\rho h}$.

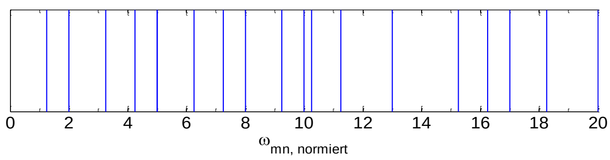


Bild 4. Dasselbe bei $b = 2a$ normiert auf $\pi^2/a^2 \cdot \sqrt{D/\rho h}$.