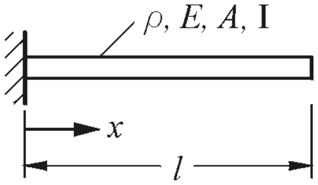
Biegeschwingungen von Balken, Zweidimensionale Schwingungen

Lit.: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III". Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4"

I. Balkenschwingung

Beispiel 1: Gegeben sei ein links eingespannter Balken. Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen und die Eigenformen der Schwingungen.



Lösung: Die allgemeine Lösung lautet

$$W(x) = A^* \cos\kappa x + B\sin\kappa x + C\cosh\kappa x + D\sinh\kappa x\,.$$

Die Randbedingungen sind:

Verschiebung links verschwindet:

$W(0)=0: \quad A^* + C = 0$

Neigung links verschwindet:

$W'(0)=0: \quad B + D = 0$

Moment rechts verschwindet:

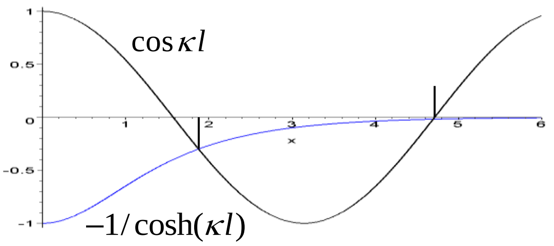
$$W''(l)=0: \quad \begin{aligned}&-A^*\cos\kappa l - B\sin\kappa l\\ &+C\cosh\kappa l + D\sinh\kappa l = 0\end{aligned}$$

Kraft rechts verschwindet:

$$W'''(l)=0 \quad \begin{aligned}&A^*\sin\kappa l - B\cos\kappa l\\ &+C\sinh\kappa l + D\cosh\kappa l = 0\end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung (Determinante des Gleichungssystems wird Null):

$$\cosh\kappa l\cos\kappa l + 1 = 0 \text{ oder } \cos\kappa l = -\frac{1}{\cosh\kappa l}$$



$\kappa_1 l = 1.8, \quad \kappa_2 l = 4.7$

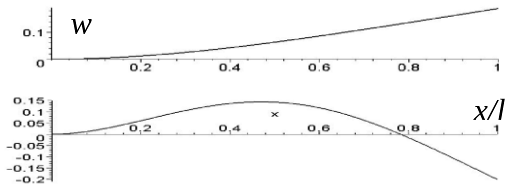
Um die Eigenformen zu bestimmen, verwenden wir drei der vier Gleichungen des homogenen Gleichungssystems

$$C = -A^*, \quad B = -D = -A^*\frac{\cos\kappa l + \cosh\kappa l}{\sin\kappa l + \sinh\kappa l}.$$

Die Eigenformen lauten dann:

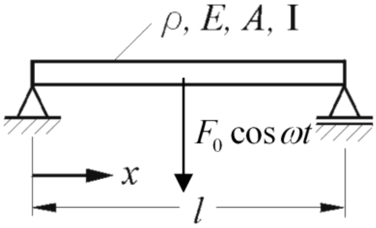
$$W_n(x) = A^*\left\{\cos\kappa_n x - \cosh\kappa_n x - \frac{\cos\kappa_n l + \cosh\kappa_n l}{\sin\kappa_n l + \sinh\kappa_n l}\left(\sin\kappa_n x - \sinh\kappa_n x\right)\right\}$$

Die ersten zwei Eigenformen sind im Bild gezeigt.



II. Erzwungene Schwingungen

Beispiel 2: Zu berechnen ist die Amplitude der Schwingungen des Mittelpunktes des gezeigten Balkens.



Lösung: Wir suchen die partikuläre Lösung in der Form $w(x,t) = W(x)\cos\omega t$. Die allgemeine Lösung bis zur Mitte des Balkens sei

$$W(x) = A^*\cos\kappa x + B\sin\kappa x + C\cosh\kappa x + D\sinh\kappa x$$

Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} W(0)=0 \qquad & A^* + C = 0\\ W''(0)=0 \qquad & -A^* + C = 0\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}A^* &= 0\\ C &= 0\end{aligned}$$

$W'(l/2) = 0$ (aus Symmetriegründen):

$$\cancel{-A^*\sin\kappa l/2} + B\cos\kappa l/2 + \cancel{C\sinh\kappa l/2} + D\cosh\kappa l/2 = 0$$

$$Q_{links}(l/2) - F_0/2\cdot\cos\Omega t = 0;$$

$$Q(l/2) = -EIw'''(l/2,t) = F(t)/2:$$

$$\cancel{A^*\sin\kappa l/2} - B\cos\kappa l/2 + \cancel{C\sinh\kappa l/2} + D\cosh\kappa l/2 = \frac{-F_0}{2\kappa^3 EI}$$

Die Lösung lautet

$$D = -\frac{F_0}{4\kappa^3 EI\cosh\kappa l/2}, \quad B = \frac{F_0}{4\kappa^3 EI\cos\kappa l/2}.$$

Die Ortsfunktion ist

$$W(x) = \frac{F_0}{4\kappa^3 EI}\left(\frac{\sin\kappa x}{\cos\kappa l/2} - \frac{\sinh\kappa x}{\cosh\kappa l/2}\right).$$

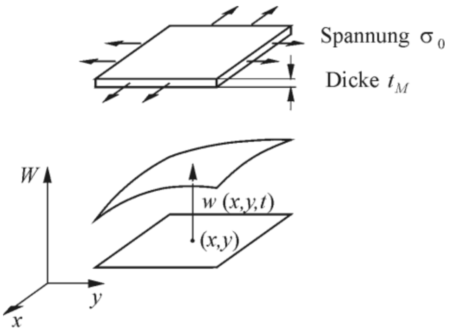
Die Amplitude der Schwingungen bei $x = l/2$:

$$W(l/2) = \frac{F_0}{4\kappa^3 EI}\left(\frac{\sin\kappa l/2}{\cos\kappa l/2} - \frac{\sinh\kappa l/2}{\cosh\kappa l/2}\right)$$

Sie wird unendlich, wenn der Nenner Null wird.

III. Bewegungsgleichung für eine Membran

Genauso wie eine Saite, hat eine *Membran* keine Biegesteifigkeit. Sie wird erst durch eine Vorspannung elastisch. Betrachten wir eine in allen Richtungen gleich gespannte Membran (Spannung σ_0).



Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)} \quad \text{mit} \quad c^2 = \sigma_0 / \rho$$

Zweidimensionale Wellengleichung

Die Ableitungen auf der rechten Seite verkürzt man oft zu

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ heißt *Laplace-Operator*.

Die Wellengleichung kann dann auch in der Form $\boxed{\ddot{w} = c^2 \Delta w}$ geschrieben werden.

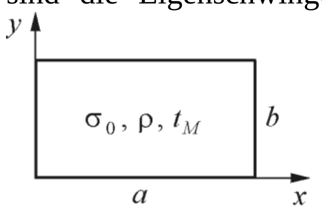
IV. Bernoulli-Ansatz. Die zweidimensionale Wellengleichung kann immer mit dem Bernoulli-Ansatz gelöst werden:

$$w(x,y,t) = W(x,y)\cdot\cos\omega t$$

Das ist besonders sinnvoll, wenn nach Eigenfrequenzen gefragt wird. Einsetzen in die Wellengleichung liefert für den Ortsteil des Ansatzes die folgende Gleichung

$$\underbrace{\Delta W + k^2 W = 0}_{\text{Helmholtz-Gleichung}} \quad \text{mit} \quad k = \omega/c$$

Beispiel 3. Gegeben ist eine Rechteckmembran mit fest gelagerten Rändern. Zu finden sind die Eigenschwingungsformen und die Eigenfrequenzen.



Lösung:

Bernoulli-Ansatz:

$$w(x,y,t) = W(x,y)\cdot\cos\omega t$$

Die Ortsfunktion $W(x,y)$ suchen wir wiederum in Form eines Produktes $W(x,y) = X(x)Y(y)$ mit

$$\begin{cases} X = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x \\ Y = C\cos\beta y + D\sin\beta y \end{cases}$$

Einsetzen in die Helmholtz-Gleichung ergibt

$$\alpha^2 + \beta^2 = k^2$$

Jetzt benutzen wir die Randbedingungen:

$$W(0,y) = 0 \to X(0) = 0 \qquad A = 0$$
$$W(a,y) = 0 \to X(a) = 0 \qquad B\sin\alpha a = 0$$
$$W(x,0) = 0 \to Y(0) = 0 \qquad C = 0$$
$$W(x,b) = 0 \to Y(b) = 0 \qquad D\sin\beta b = 0$$

Daraus folgt

$$\sin\alpha a = 0 \to \alpha_m = \frac{\pi m}{a} \qquad m = 1,2,\ldots$$

$$\sin\beta b = 0 \to \beta_m = \frac{\pi n}{b} \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$k_{mn} = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Die Eigenfrequenzen sind somit

$$\omega_{mn} = k_{mn} c = \pi c\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

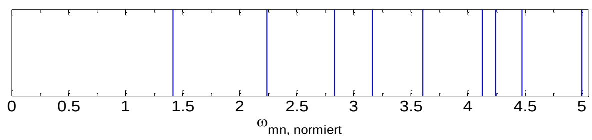
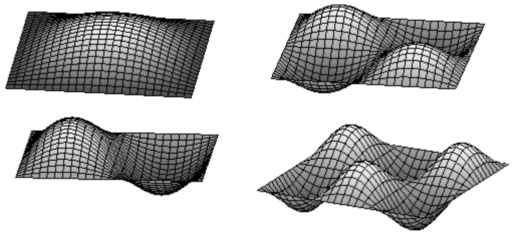


Bild. Verteilung von Eigenfrequenzen einer Membran bei $a = b$ normiert auf $\pi c / a$.

Die Eigenfunktionen sind:

$$W_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Die ersten vier Eigenschwingungsformen:



V. Experiment: Eigenschwingungsformen einer Platte