

1. Merkblatt

Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine lineare, homogene, partielle Differentialgleichung.

$$\ddot{w} = c^2 w'' \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1)$$

d'Alembertsche Lösung

Die D'Alembertsche Lösung der Wellengleichung lautet

$$w(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (2)$$

Die allgemeine Form der (zunächst beliebigen) Funktionen f_1 und f_2 kann aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Diese muss anschließend an die Randbedingungen angepasst werden.

Randbedingungen

Für eine Saite kommen zwei Sorten von Randbedingungen in Betracht:

$$\begin{aligned} w(\text{Rand}) &= 0 && \text{fester Rand} \\ w'(\text{Rand}) &= 0 && \text{freier Rand} \end{aligned}$$

Um einen **festen** Rand zu realisieren, wird die einlaufende Welle mit einer Welle gleicher Form, aber **entgegengesetzter** Richtung und **negativem** Vorzeichen überlagert.

Um einen **freien** Rand zu realisieren, wird die einlaufende Welle mit einer Welle gleicher Form, aber **entgegengesetzter** Richtung und **gleichem** Vorzeichen überlagert.

Bernoulli'sche Lösung

Mit Hilfe des Separationsansatzes

$$w(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (3)$$

erhält man zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (4) \quad \left| \quad X'' + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0 \quad (6)$$

mit der allg. Lösung

$$T(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \quad (5) \quad \left| \quad X(x) = A \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) \quad (7)$$

und den Konstanten A , B , C und D . Da ein Kontinuum unendlich viele Eigenkreisfrequenzen ω_i besitzt, ergibt sich die allgemeine Gesamtlösung zu

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t)) \left(A_i \sin\left(\frac{\omega_i}{c} x\right) + B_i \cos\left(\frac{\omega_i}{c} x\right) \right) \quad (8)$$

Das Auswerten der Rand- und Anfangsbedingungen liefert sowohl alle Konstanten als auch die Eigenkreisfrequenzen ω_i .