Klausur Kontinuumsmechanik — WiSe 2015/2016

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

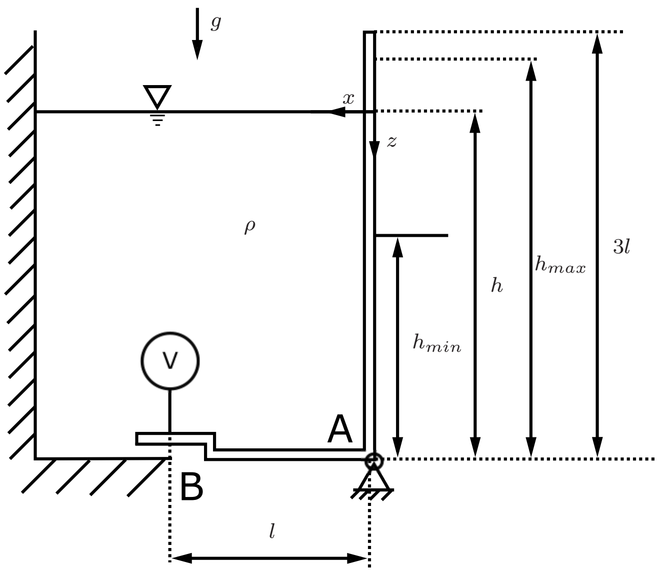
Dieser Kasten ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

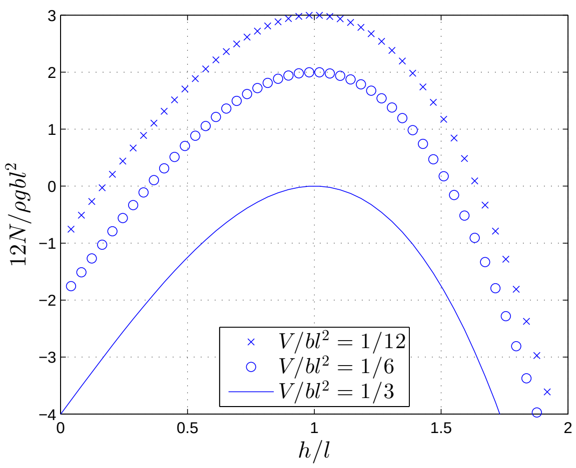
Nachname	__________	Vorname	__________
Studiengang	__________	Matrikelnummer	__________

Aufgabe	1	2	3	Σ 1 - 3	4	Korrektor_in
erreichte Punkte				/ 40	/ 10	

Die Klausur umfasst 4 Aufgaben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 20 von 50 Punkten erreicht werden. Dabei muss Aufgabe 4 (Kurzfragen) mit mind. 5 von 10 Punkten bestanden werden. Tragen Sie die Ergebnisse des **Kurzfragenteils direkt auf dem Klausurblatt** ein, nur diese Eintragungen werden berücksichtigt! Es werden **alle** Rechenaufgaben gewertet. Bitte sauber schreiben, unlesbare Lösungen werden **nicht** beachtet.

1 (Hydrostatik) (12+2=14 Punkte)





Es wurde der oben links skizzierte Mechanismus konstruiert, um sowohl bei einem zu hohen als auch einem zu niedrigen Wasserpegel h Wasser aus einem Behälter abzulassen. Die rechtwinklige Klappe mit den Abmaßen l, $3l > h_{max}$ und der Breite b ist im Punkt A gelenkig gelagert und liegt im Punkt B auf. Außerdem ist im Punkt B ein vom Wasser vollständig umschlossener Ballon mit dem Volumen V über einen dünnen Faden an der Klappe befestigt. Der Faden, der Ballon und die Klappe seien masselos.

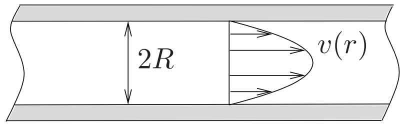
Geg.: g, V, ρ, l, b

(a) Schneiden Sie die Klappe frei und bestimmen Sie in Abhängigkeit des Wasserpegels h die Auflagerreaktionen im Punkt A und die Normalkraft N im Punkt B.

(b) Lesen Sie aus dem oben rechts stehenden Diagramm für $V = \frac{1}{12}bl^2$ die minimale und maximale Höhe, h_{min} und h_{max}, ab, bei der sich jeweils die Klappe öffnet.

2 (Bekannte Aufgabe) (4+1+2+3=10 Punkte)

Betrachtet wird ein Rohr (Radius R), durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität η) fließt. Der Volumenstrom sei Q. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden. Das Geschwindigkeitsprofil $v(r)$ bei stationärer Strömung soll in den unten aufgeführten Schritten bestimmt werden.



(a) Zeigen Sie, daß die Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit $v(r)$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

lautet.

(b) Wie lauten die Randbedingungen?

(c) Bestimmen Sie nun das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit vom Druckgefälle.

(d) Leiten Sie schließlich eine Formel für das Geschwindigkeitsprofil $v(r)$ her, in der nur die gegebenen Größen enthalten sind.

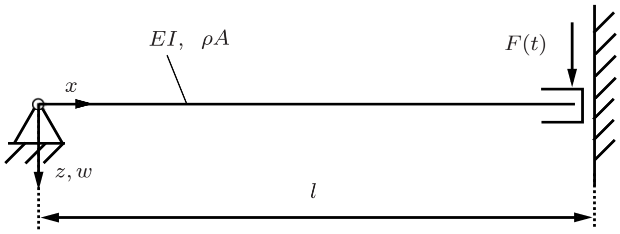
Geg.: R, Q, η

3 (Kontinuumsschwingungen) (4+1+2+4+1+4=16 Punkte)

Es sollen die Schwingungen des skizzierten Balkens mit der Bewegungsgleichung

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$$

untersucht werden.



Geg.: ρA, EI, l, $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

(a) Betrachten Sie zunächst die **freien** Schwingungen, das heißt $F_0 = 0$. Überführen Sie mit Hilfe eines Produktansatzes

$$w(x,t) = W(x)T(t)$$

die Bewegungsgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung für die Ortsfunktion $W(x)$ an. Verwenden Sie das Kürzel $\kappa^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$.

(c) Formulieren Sie die geometrischen und physikalischen Randbedingungen.

(d) Stellen Sie die Frequenzgleichung für κ auf.

(e) Betrachten Sie nun **erzwungene** Schwingungen mit $F_0 \neq 0$. Für die partikuläre Lösung wird ein Gleichtaktansatz der Form

$$w_p(x,t) = W_p(x) \cos \Omega t$$

gemacht. Geben Sie die gegenüber Aufgabenteil c) einzige veränderte Randbedingung für $w_p(x,t)$ an.

(f) Bestimmen Sie die Ortsfunktion der partikulären Lösung, $W_p(x)$. Verwenden Sie das Kürzel $k^4 = \frac{\rho A \Omega^2}{EI}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass sich die Bewegungsgleichung und drei der vier Randbedingungen gegenüber der Betrachtung der freien Schwingungen durch die Kraft $F(t)$ nicht verändern.

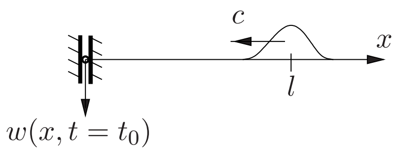
4 Kurzfragen 10 Punkte

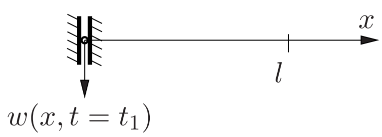
1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

Druckdifferenz Δp	
Volumenstrom Q	
Eigenkreisfrequenz ω	
Dynamische Viskosität η	

2 Punkte

2. Eine Transversalwelle läuft in einer Saite mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c auf ein freies Ende bei $x = 0$ zu. Ihr Maximum befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x = l$. Skizzieren Sie im rechten Diagramm die Verschiebung $w(x, t = t_1)$ zur Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$!

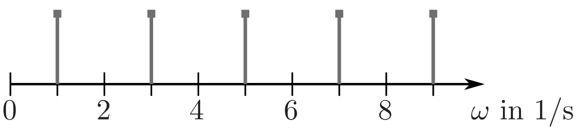




1 Punkt

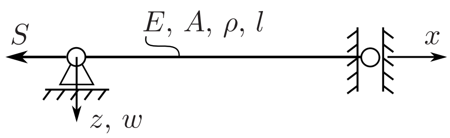
3. Die ersten Eigenkreisfrequenzen ω_n eines Kontinuums sind wie dargestellt bestimmt worden. Welches der folgenden Systeme kann ein solches Frequenzspektrum besitzen? Kreuzen Sie an.

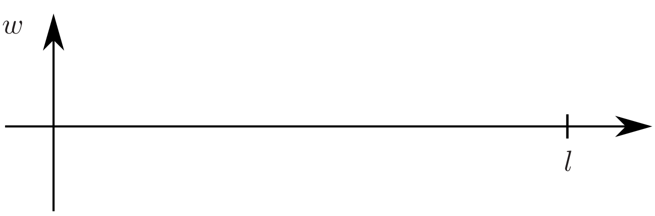
- ☐ Eine gelenkig gelagerte runde Platte
- ☐ Eine beidseitig fest gelagerte gespannte Saite
- ☐ Ein einseitg fest eingespannter Dehnstab
- ☐ Ein gelenkig gelagerter Bernoulli-Balken



1 Punkt

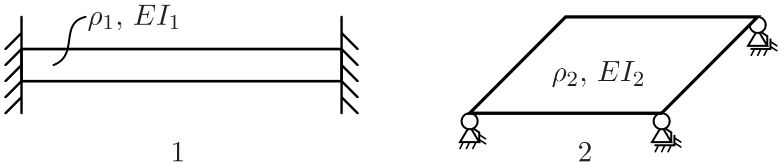
4. Für die abgebildete Saite der Länge l soll qualitativ die zweite Eigenform skizziert werden. Berücksichtigen Sie die Randbedingungen.





1 Punkt

5. Zwei Systeme sollen verglichen werden. Das erste System ist ein BERNOULLI-Balken der Länge l, das zweite System ist eine gelenkig gelagerte elastische Platte (Breite a, Tiefe b, Dicke t). Beide führen freie Biegeschwingungen aus. Tragen Sie für beide Systeme die Anzahl an Eigenfrequenzen ein.



1 $\square$ 2 $\square$

1 Punkt

---

6. Wie groß ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c von Longitudinalwellen in einem beidseitig fest eingespannten Stab? Benennen Sie die verwendeten Größen.

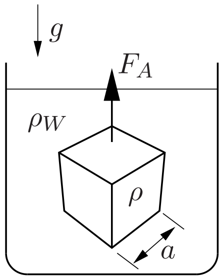
$c =$

1 Punkt

---

7. Ein Würfel mit der Dichte ρ und der Kantenlänge a ist auf der Spitze stehend vollständig in Wasser (Dichte ρ_W) untergetaucht.

Wie groß ist die Auftriebskraft des Würfels?



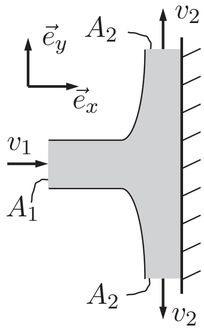
$F_A =$

Geg.: ρ_W, ρ, a, g

1 Punkt

---

8. Ein Strahl (Geschwindigkeit v_1, Querschnittsfläche A_1) einer idealen Flüssigkeit (Dichte ρ) wird an einer Wand abgelenkt. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{F}$ der Kraft, die die Wand auf den Strahl ausübt.



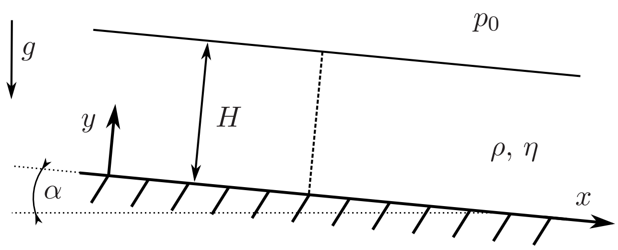
$\vec{F} =$

Geg.: ρ, A_1, v_1, A_2, v_2

1 Punkt

---

9. Auf einer geneigten Ebene bildet sich aufgrund der Gravitation eine ebene, offene viskose Strömung der Schichtdicke H aus. Es handelt sich um ein NEWTONsches Fluid. Skizzieren Sie qualitativ das Geschwindigkeitsprofil $v_x(y)$, das sich einstellt.



Geg.: g, H, ρ, η, p_0, $\alpha > 0$

1 Punkt
