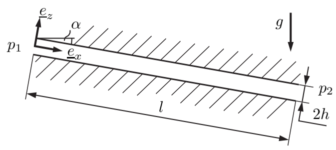
Tutorium

Aufgabe 79

Ein inkompressibles, Newtonsches Fluid (Dichte ρ, dynamische Viskosität η) fließt in $\underline{e}_x$-Richtung durch einen dünnen Spalt (Dicke $2h$, Länge l). Senkrecht zur Zeichenebene hat der Spalt die Breite b mit $b >> h$. Am linken Ende des Spalts herrscht der Druck p_1, am rechten Ende p_2. Im Spalt stellt sich eine stationäre, laminare Strömung ein. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass die Strömungsgeschwindigkeit v nur von z und der Druck p nur von x abhängen.



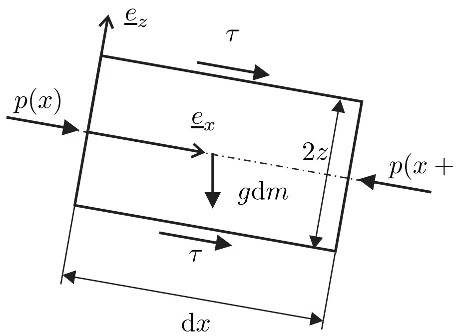
Geg.: $\eta, \rho, \alpha, g, l, h, p_1, p_2$

(a) Schneiden Sie ein Volumenelement des Fluids frei und ermitteln Sie daran das Strömungsprofil $v(z)$ im Spalt und die maximale Geschwindigkeit v_0.
Hinweis: Verwenden Sie ein Volumenelement, welches in $\underline{e}_z$-Richtung endlich breit ist und symmetrisch zur $\underline{e}_x$-Achse liegt. Überlegen Sie, was das für die Schubspannungen bedeutet.

(b) Bestimmen Sie den Volumenstrom Q durch den Spalt.

(c) Angenommen, das Fluid wäre reibungsfrei. Wie groß müsste die Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ im Vergleich zur maximalen Geschwindigkeit v_0 sein, damit sich derselbe Volumenstrom einstellt?

(a) Freischnitt:



Aus Symmetriegründen sind die Schubspannungen am oberen und am unteren Rand identisch. Da die Strömung stationär ist, müssen die Kräfte in $\underline{e}_x$-Richtung im Gleichgewicht sein:

$$\begin{aligned} 0 &= 2zb\left(p(x) - p(x+dx)\right) + gdm \sin\alpha + 2\tau b dx \\ &= -z\left(p(x+dx) - p(x)\right) + \rho g z \sin\alpha dx + \tau dx \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{dp}{dx} z - \rho g z \sin\alpha. \tag{1}$$

Mit

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \tag{2}$$

folgt

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right) z \tag{3}$$

und nach Integration über z:

$$v(z) = \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right) \frac{z^2}{2\eta} + c \tag{4}$$

Die Konstante c wird aus der Randbedingung

$$v(\pm h) = 0 \tag{5}$$

bestimmt:

$$\begin{aligned} v(h) = 0 &= \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right) \frac{h^2}{2\eta} + c \\ \Leftrightarrow c &= -\left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right) \frac{h^2}{2\eta}. \end{aligned} \tag{6}$$

Da die Geschwindigkeit gemäß Aufgabenstellung nicht von x abhängt, muss $\frac{dp}{dx}$ konstant bezüglich x sein und es gilt

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{l}, \quad \Delta p := p_2 - p_1. \tag{7}$$

Somit hat die Geschwindigkeit das Profil:

$$v(z) = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)(z^2 - h^2) \tag{8}$$

Die maximale Geschwindigkeit ist an der Stelle $z = 0$:

$$v_0 = v(z=0) = \frac{h^2}{2\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right). \tag{9}$$

(b) Der Volumenstrom ist:

$$Q = \int_A v(z) dA = b \int_{-h}^{+h} v(z) dz \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &= 2\frac{b}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right) \int_0^{+h} (z^2 - h^2) dz \\ &= \frac{b}{\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right) \left[\frac{1}{3}z^3 - h^2 z\right]_0^h \\ &= \frac{2bh^3}{3\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

(c) Im Falle eines reibungsfreien Fluides wäre die notwendige Geschwindigkeit $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A}. \tag{12}$$

Mit dem Volumenstrom aus Aufgabenteil (b) und der Querschnittsfläche $A = 2bh$ folgt

$$\bar{v} = \frac{h^2}{3\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right) \tag{13}$$

und durch den Vergleich mit Gleichung (9):

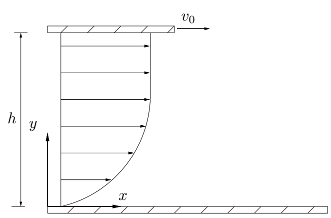
$$\bar{v} = \frac{2}{3} v_0. \tag{14}$$

Aufgabe 82

Eine ebene Platte wird in einem Abstand h über einer festen Platte wie skizziert mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 verschoben. Dabei stellt sich eine ebene Parallelströmung des Newtonschen Fluides ein. Vorausgesetzt sei eine stationäre, volumenkraftfreie, laminare Strömung.

(a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil der Strömung zwischen den Platten, wenn es sich um ein inkompressibles Fluid handelt und die Platte eine genügend große Breite b besitzt, um diese Schichtenströmung zu ermöglichen.

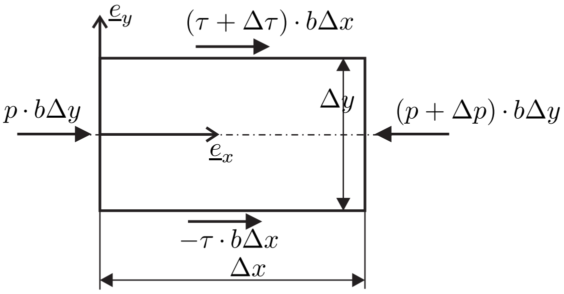
(b) Diskutieren Sie das Ergebnis in Abhängigkeit des Druckgradienten.



Geg.: h, v_0, η, b

In der Aufgabe wird eine schleichende Strömung behandelt, d.h. die Trägheitsterme sind vernachlässigbar. ($m\ddot{x} = 0$ oder $\Theta\ddot{\varphi} = 0$)

(a) 1. Weg
Freischnitt eines Masseelements



$$p \cdot \Delta y b - (p + \Delta p)\Delta y b + (\tau + \Delta\tau)\Delta x \cdot b - \tau b \Delta x = 0 \tag{15}$$

$$\Delta p \Delta y = \Delta\tau \Delta x \tag{16}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta\tau}{\Delta y} \tag{17}$$

Grenzübergang:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial\tau}{\partial y}} \tag{18}$$

NEWTONsches Schubspannungsgesetz:

$$\tau = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{19}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y^2} \tag{20}$$

2. Weg NAVIER-STOKES-Gleichung:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \underline{v} + \rho g \tag{21}$$

Da schleichende Strömung (s.o.) und keine Gewichtskräfte:

$$\operatorname{grad} p = \eta \Delta \underline{v} \tag{22}$$

Das Geschwindigkeitsprofil ist eine Funktion von y, die Geschwindigkeit geht in $\underline{e}_x$-Richtung

$$\underline{v} = v(y)\underline{e}_x \tag{23}$$

Auswerten von (22) mit (23):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \tfrac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = p(x) \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{26}$$

$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2 \tag{27}$$

Mit den Randbedingungen:

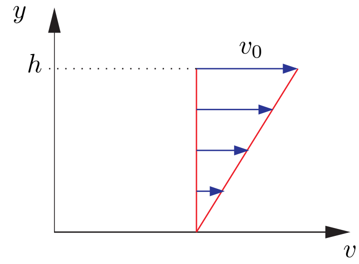
$$v(0) = 0 \qquad \Rightarrow c_2 = 0 \tag{28}$$

$$v(h) = v_0 \qquad \Rightarrow c_1 = \frac{v_0}{h} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} h \tag{29}$$

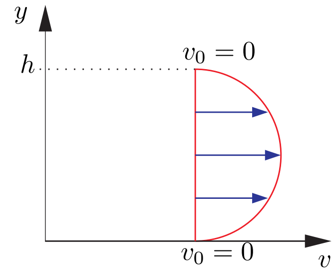
$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{2\eta} \cdot (y - h)y + \frac{v_0}{h} y \tag{30}$$

(b) Geschwindigkeitsverläufe

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$



$\frac{\partial p}{\partial x} < 0,\ v_0 = 0$



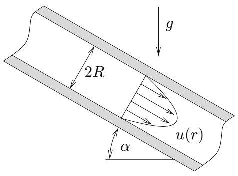
Hausaufgaben

Aufgabe 77

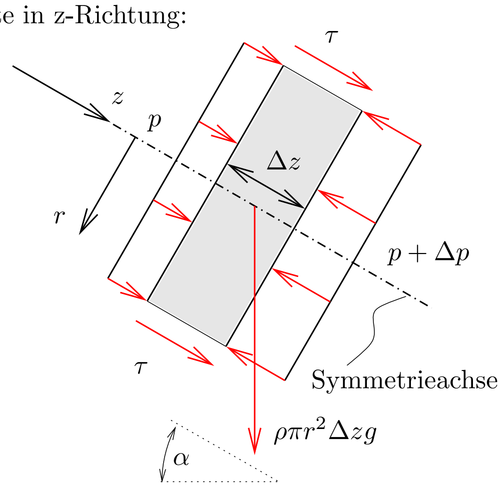
Betrachtet wird ein Rohr (Radius R, Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen α), durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität η, Dichte ρ) fließt. Der Volumenstrom sei Q. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden.

Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ bei stationärer Strömung in Abhängigkeit von den gegebenen Größen.

Geg.: R, Q, η, α, g



Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils betrachte man das Kräftegleichgewicht zwischen Druck- und Reibungskräften und der Gewichtskraft an einem Fluidelement. Dabei nutze man die Symmetrie des Problems. Das scheibenförmige Fluidelemt hat die Endflächen $A_E = \pi r^2$ und die Mantelfläche $A_M = 2\pi r \Delta z$. Damit ist die Summe der Kräfte in z-Richtung:



$$0 = \tau\, 2\pi r \Delta z - \Delta p \pi r^2 + \rho \pi r^2 \Delta z g \sin\alpha \tag{31}$$

$$0 = 2\tau - r\frac{\Delta p}{\Delta z} + \rho g r \sin\alpha \tag{32}$$

Grenzübergang $\Delta z \to 0$:

$$\tau = \frac{r}{2}\frac{dp}{dz} - \frac{1}{2}\rho g r \sin\alpha \tag{33}$$

Wir nehmen an, dass der Druck p nur von der Lauflänge z abhängt: $p = p(z)$. Diese Annahme scheint gerechtfertigt, wenn dass Rohr hinreichen dünn ist. Bei einer Newton'schen Flüssigkeit beschreibt folgendes Materialgesetz den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Schubspannung aus Gleichung (33):

$$\tau = \eta \frac{du}{dr} \tag{34}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\eta}\left\{\frac{r^2}{4}\frac{dp}{dz} - \frac{\rho g r^2 \sin\alpha}{4} + C\right\} \tag{35}$$

Die unbekannte Integrationskonstante C wird durch die Randbedingung bestimmt. An der Rohrwand gilt die Wandhaftbedingung:

$$u(r = R) \stackrel{!}{=} 0 \tag{36}$$

$$\Rightarrow C = \frac{R^2}{4}\left[-\frac{dp}{dz} + \rho g \sin\alpha\right] \tag{37}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{4\eta}\left\{\left(R^2 - r^2\right)\left[-\frac{dp}{dz} + \rho g \sin\alpha\right]\right\} \tag{38}$$

Jetzt ist das Geschwindigkeitsprofil $u = u(r)$ als Funktion des Druckgradienten $\frac{dp}{dz}$ bekannt. In der Aufgabenstellung ist aber der Volumenstrom Q vorgegeben:

$$Q \stackrel{\text{Idee!}}{=} \int_A u\, dA \stackrel{(38)}{=} \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} u(r) r dr d\varphi \tag{39}$$

$$\cdots \Rightarrow Q = \frac{\pi R^4}{8\eta}\left[-\frac{dp}{dz} + \rho g \sin\alpha\right] \tag{40}$$

$$\Rightarrow \frac{8Q\eta}{\pi R^4} = \left[-\frac{dp}{dz} + \rho g \sin\alpha\right] \tag{41}$$

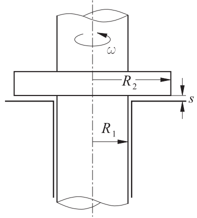
(41) in (38):

$$u(r) = \left(R^2 - r^2\right)\frac{2Q}{\pi R^4} \tag{42}$$

$$= \frac{2Q}{\pi R^2}\left\{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} \tag{43}$$

Aufgabe 83

Das gezeichnete Traglager wird durch einen sehr dünnen Ölfilm der Dicke s geschmiert. Die Zähigkeit des Schmieröls sei η. Bestimmt werden soll das zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung erforderliche Drehmoment $M(\omega)$ in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Reibung im Radiallagerteil (zylindrischer Bereich) soll dabei vernachlässigt werden.



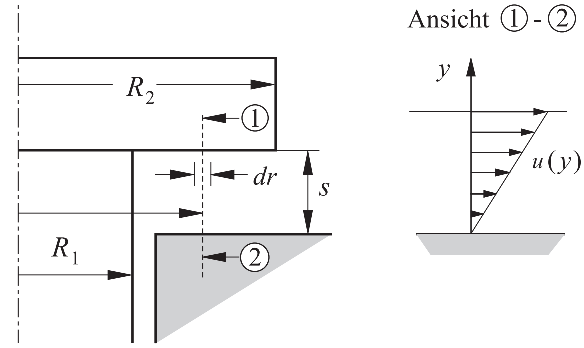
(a) Bestimme die Schubspannung $\tau(r)$ im Abstand r von der Drehachse bei vorgegebener Winkelgeschwindigkeit ω.

(b) Wie groß ist das Drehmoment $dM(r)$, das zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung eines Kreisringes mit der infinitesimalen Breite dr erforderlich ist?

(c) Bestimme das Drehmoment $M(\omega)$!

(d) Welches Drehmoment ergibt sich für $\omega = 318,3\ \text{min}^{-1}$?

Geg.: $R_1 = 0{,}2\text{m}$; $R_2 = 0{,}4\text{m}$; $s = 0{,}2\text{mm}$;
$\omega = 318{,}3\text{min}^{-1} \hat{=}\ n = 50.66\text{min}^{-1}$; $\eta = 0{,}4\text{Ns/m}^2$



(a) Für die Spannung $\tau(r)$ gilt nach dem Newtonschen Reibungsgesetz (Couette-Strömung ohne Druckgradient):

$$\tau(r) = \eta \cdot \frac{du}{dy} = \eta \cdot \frac{\Delta u}{\Delta y} = \eta \cdot \frac{u_{\text{Welle}}(r)}{s} \tag{44}$$

mit

$$u_{\text{Welle}}(r) = r \cdot \omega \tag{45}$$

Damit folgt:

$$\tau(r) = \eta \cdot \frac{r \cdot \omega}{s} \tag{46}$$

(b) Für das Drehmoment dM des Kreisringes mit dem Radius r und der Breite dr gilt:

$$dM = \tau(r) \cdot r \cdot dA \tag{47}$$

Mit der Fläche des Kreisringes

$$dA = 2\pi \cdot r \cdot dr \tag{48}$$

und Gleichung (46) wird daraus

$$dM = \frac{2\pi\eta\omega}{s} r^3 dr \ . \tag{49}$$

(c) Das Gesamtdrehmoment ergibt sich daraus durch Integration:

$$M = \int_{R_1}^{R_2} dM \tag{50}$$

$$= \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega}{s} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \tag{51}$$

$$= \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega}{s} \cdot \left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \right) \tag{52}$$

$$= \frac{\pi \cdot \eta \cdot \omega}{2s} \cdot \left(R_2^4 - R_1^4 \right) \tag{53}$$

(d) Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$M = \frac{\pi \cdot 0{,}4 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \cdot 318{,}3 \frac{1}{\text{min}} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{s}} \left[(0{,}4\text{m})^4 - (0{,}2\text{m})^4 \right]}{2 \cdot 0{,}0002\text{m}}$$

$$\approx 400\text{Nm}$$