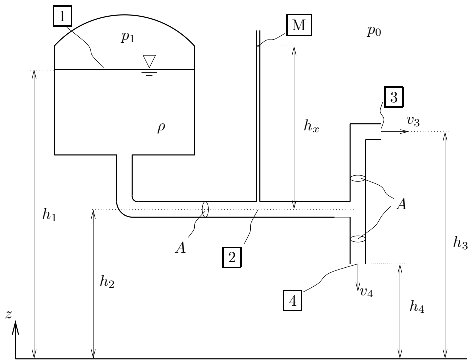
Tutorium

Aufgabe 68

Gegeben sei nebenstehend skizziertes Leitungssystem. Der Flüssigkeitspegel im Kessel werde durch eine Speisewasserpumpe auf konstanter Höhe gehalten.

Geg.: $h_i (i = 1, \ldots, 4)$, A, ρ, p_0, Q_4, g



(a) Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Volumenstrom Q_4 und der Austrittsgeschwindigkeit v_4 an der Stelle $\boxed{4}$ an. Wie groß ist dort der Druck?

(b) Formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{4}$. Wie groß muss der Kesseldruck p_1 sein, damit an der Stelle $\boxed{4}$ ein vorgegebener Volumenstrom Q_4 entnommen werden kann?

(c) Formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung nun zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$. Benutzen Sie das Ergebnis für den Druck p_1 aus Aufgabenpunkt (b), um die Austrittsgeschwindigkeit v_3 bei $\boxed{3}$ zu berechnen.

(d) Auf welche Höhe h_x steigt der Wasserspiegel im Messrohr $\boxed{\text{M}}$?

(a)

$$Q = A \cdot v \tag{1}$$

$$\Rightarrow v_4 = \frac{Q_4}{A} \tag{2}$$

An der Austrittsstelle $\boxed{4}$ herrscht Umgebungsdruck

$$p_4 = p_0 \tag{3}$$

(b) Bernoulli-Gleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{4}$:

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + 0 = \frac{p_4}{\rho} + gh_4 + \frac{v_4^2}{2} \tag{4}$$

mit (2) und (3):

$$p_1 = p_0 + \rho g (h_4 - h_1) + \frac{\rho}{2A^2} Q_4^2 \tag{5}$$

(c) Bernoulli-Gleichung zwischen $\boxed{1}$ und $\boxed{3}$:

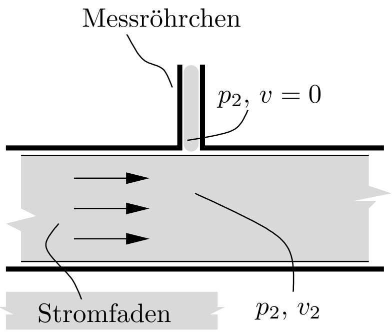
$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + 0 = \frac{p_3}{\rho} + gh_3 + \frac{v_3^2}{2} \tag{6}$$

mit $p_3 = p_0$ und Gleichung (5):

$$v_3 = \sqrt{2g(h_4 - h_3) + \frac{Q_4^2}{A^2}} \tag{7}$$

Beachte: Nur wenn der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, ergibt sich ein sinnvolles Ergebnis, der Grenzfall ist der, daß bei $\boxed{3}$ nichts mehr ausströmt.

(d) Das Messrohr stellt eine einfache Anordnung dar zur Messung des Drucks in der Strömung an der Stelle $\boxed{2}$. Die Öffnung des Messrohres in die Rohrleitung ist sehr klein und genau senkrecht zur Strömung angeordnet, so dass keine nennenswerte Flüssigkeitsmenge herein- oder herausströmt.



Für die Stelle $\boxed{2}$ innerhalb des Stromfadens gilt:

Bernoulli $\boxed{1}$-$\boxed{2}$: $$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + 0 = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

Konti $\boxed{2}$-$\boxed{3}$,$\boxed{4}$: $$Av_2 = Av_3 + Av_4$$

$$p_2 = p_1 + \rho g (h_1 - h_2) - \frac{\rho}{2} (v_3 + v_4)^2 \tag{8}$$

Im Messrohr ruht die Flüssigkeit:

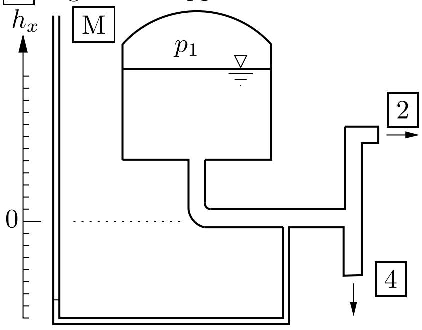
$$p_2 + 0 = p_0 + \rho g h_x \tag{9}$$

$$h_x = \frac{p_2 - p_0}{\rho g} \tag{10}$$

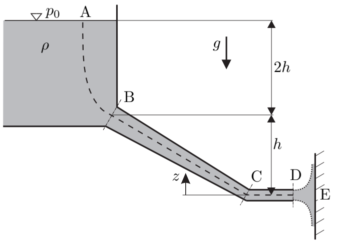
mit den Gleichungen (2), (5) und (7):

$$h_x = h_3 - h_2 - \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_4}{A} \right)^2 \left[1 + 2 \sqrt{2g(h_4 - h_3) \left(\frac{A}{Q_4} \right)^2 + 1} \right]$$

Bei $\boxed{4}$ herrscht Umgebungsdruck. $\boxed{2}$ liegt höher, und die Geschwindigkeit v_2 an dieser Stelle ist nicht kleiner als die bei $\boxed{4}$ (solange bei $\boxed{3}$ nichts einströmt). Deshalb muss der Druck p_2 kleiner als der Umgebungsdruck sein und der Wasserspiegel im Messröhrchen tiefer als Punkt $\boxed{2}$ und sogar tiefer als Punkt $\boxed{4}$ liegen. Die Apparatur muss deshalb wie folgt aussehen:



Aufgabe 72



Aus dem Abflussrohr eines großen Behälters trifft Wasser auf eine Wand.
Das Abflussrohr besitzt einen kreisförmigen Querschnitt. Der Querschnittsradius r verkleinert sich entlang der Rohrlänge linear von $r(z = h) = 2R$ bei B auf $r(z = 0) = R$ bei C. Zwischen C und D ist der Querschnitt konstant.
Die Querschnittsfläche des Abflussrohres ist im Vergleich zur freien Wasserfläche im Behälter vernachlässigbar klein. Außerdem ist auch der Radius r des Rohres gegenüber der Höhe h vernachlässigbar klein. Das Wasser kann als ideales Fluid und die Strömung als stationär betrachtet werden.
Gegeben: g, ρ, p_0, h, R

(a) Geben Sie den Wasserdruck $p(z)$ im Behälter in Abhängigkeit der Koordinate z an. Wie groß ist der Wasserdruck am Behälterboden (Tiefe $2h$)?

(b) Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit $v(z)$ zwischen B und C in Abhängigkeit von der Höhe z.

(c) Ermitteln Sie den Druckverlauf $p(z)$ zwischen B und C in Abhängigkeit von der Höhe z.

(d) Welche Kraft übt der Wasserstrahl bei E auf die Wand aus?

Hinweis: Überlegen Sie bei (b) und (c) zunächst, wie groß Strömungsgeschwindigkeit und Druck an den Stellen D und C sind.

(a) Hydrostatik:

$$p(z) = p_0 + \rho g(3h - z) \tag{11}$$

am Behälterboden herrscht der Druck

$$p(z = h) = p_0 + 2\rho g h \tag{12}$$

(b) Radius des Abflussrohres zwischen B und C:

$$r(z) = R + \frac{R}{h} z \tag{13}$$

Querschnittsfläche zwischen B und C:

$$A(z) = \pi r(z)^2 = \pi (R + \frac{R}{h} z)^2 \tag{14}$$

Die Geschwindigkeit an der Rohröffnung wird mit der Ausflussformel von Toricelli (alternativ: Bernoulli A-D) bestimmt:

$$v_\mathrm{D} = \sqrt{6gh} \tag{15}$$

und aus der Kontinuitätsgleichung folgt unmittelbar

$$v_\mathrm{C} = v_\mathrm{D} = \sqrt{6gh}. \tag{16}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung kann nun die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt z zwischen B und C berechnet werden:

$$A(z)v(z) = A_\mathrm{C} v_\mathrm{C} \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow v(z) = \frac{\pi R^2}{\pi \left(R + \frac{R}{h} z\right)^2} \sqrt{6gh}$$

$$v(z) = \frac{\sqrt{6gh}}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^2}. \tag{18}$$

(c) An der Rohröffnung ist der Druck in der Flüssigkeit gleich dem Außendruck und aus der Bernoulligleichung folgt mit (16):

$$p_\mathrm{C} = p_\mathrm{D} = p_0. \tag{19}$$

Der Druck in einem beliebigen Punkt z zwischen B und C kann nun ebenfalls mit der Bernoulligleichung berechnet werden:

$$p(z) + \frac{\rho}{2} v(z)^2 + \rho g z = p_\mathrm{C} + \frac{\rho}{2} v_\mathrm{C}^2 + 0 \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow p(z) = p_0 - \rho g z + \frac{\rho}{2}(v_\mathrm{C}^2 - v(z)^2)$$

$$= p_0 - \rho g z + \frac{\rho}{2} \left[6gh - \frac{6gh}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^4} \right]$$

$$p(z) = p_0 + \rho g(3h - z) - \frac{3\rho g h}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^4} \tag{21}$$

(d) Die Kraft auf die Wand wird mit dem Impulssatz berechnet. Dazu wird zunächst der Massenstrom bestimmt:

$$J_\mathrm{D} = \rho A_\mathrm{D} v_\mathrm{D} \tag{22}$$

$$= \pi \rho R^2 \sqrt{6gh} \tag{23}$$

Der Impulssatz liefert die Kraft auf die Flüssigkeit:

$$F_F = J_\mathrm{D}(v_\mathrm{E} - v_\mathrm{D}) \quad \text{mit } v_\mathrm{E} = 0$$

$$= -6\pi \rho g h R^2. \tag{24}$$

Die Kraft auf die Wand hat den gleichen Betrag, ist jedoch entgegen gesetzt gerichtet. Also übt der Wasserstrahl die Kraft

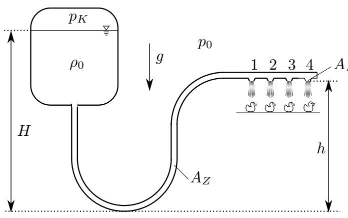
$$F = -F_F = 6\pi \rho g h R^2 \tag{25}$$

auf die Wand aus.

Hausaufgaben

Aufgabe 60

Dargestellt ist ein Teil eines Produktionsprozesses, bestehend aus einem Kessel mit vier Brausköpfen, zum Reinigen der durchlaufenden Güter. Der Umgebungsdruck sei p_0. Der Kesseldruck sei p_K. Die Querschnittsfläche der Auslässe der Brausen sei A_D, die Querschnittsfläche der Zuleitung sei A_Z. Der Wasserspiegel im Kessel werde auf konstanter Höhe H gehalten. Hinweis: Entlang einer Stromlinie gilt $\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gz = \text{const.}$ (Bernoullische Gleichung)



(a) Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 und v_4 der Brausköpfe.

(b) Wie groß muss die Druckdifferenz $\triangle p := p_K - p_0$ sein, damit ein bestimmter Volumenstrom $\dot V$ (der sich auf alle vier Brausköpfe verteilt) entnommen werden kann?

(c) Wie ändern sich die unter a) und b) berechneten Größen, wenn bei demselben Volumenstrom nur zwei Brausköpfe in Betrieb sind?

gegeben: p_0, p_K, A_D, A_Z, H, h

(a) Bernoulligleichung von $0 \to 1$

$$\frac{p_K}{\rho} + \overbrace{\frac{v_0^2}{2}}^{=0} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh \tag{26}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2\frac{p_K - p_0}{\rho} + 2g(H-h)} \tag{27}$$

$$v_1 = \sqrt{2\frac{\triangle p}{\rho} + 2g(H-h)} \tag{28}$$

Da alle Brausköpfe auf gleicher Höhe hängen, berechnet man die Geschwindigkeiten v_2, v_3 und v_4 analog zu (28).

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 =: v \tag{29}$$

(b) Der gesamte Volumenstrom $\dot V$ setzt sich aus den Strömen der einzelnen Brausköpfe zusammen. Mit (29) ergibt sich

$$\dot V = v_1 A_D + v_2 A_D + v_3 A_D + v_4 A_D$$
$$\dot V = 4 v A_D \tag{30}$$

Einsetzen von (28) und Umformen nach $\triangle p$

$$\dot V = 4\sqrt{2\frac{\triangle p}{\rho} + 2g(H-h)}A_D \tag{31}$$

$$\left(\frac{\dot V}{4A_D}\right)^2 = 2\frac{\triangle p}{\rho} + 2g(H-h) \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\dot V}{4A_D}\right)^2 = \frac{\triangle p}{\rho} + g(H-h) \tag{33}$$

$$\triangle p = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\dot V}{4A_D}\right)^2 - \rho g(H-h) \tag{34}$$

(c) Bei konstantem Volumenstrom $\dot V$ gilt mit der neuen Austrittsgeschwindigkeit $v_{c)}$ bei nur zwei Brausköpfen:

$$\dot V = 2v_{c)}A_D \overset{!}{=} 4v_{a)}A_D = \text{const.} \tag{35}$$

$$\Rightarrow v_{c)} = 2v_{a)} \tag{36}$$

Gleichung (26) gilt natürlich weiterhin. Jetzt setzt man $v_1 = v_{c)} = \frac{\dot V}{2A_D}$ ein und stellt nach $\triangle p$ um.

$$\frac{p_K}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_{c)}^2}{2} + gh \tag{37}$$

$$\frac{p_K - p_0}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot V}{2A_D}\right)^2 - g(H-h) \tag{38}$$

$$\triangle p = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\dot V}{2A_D}\right)^2 - \rho g(H-h) \tag{39}$$

Also verdoppelt sich die Austrittsgeschwindigkeit und der Druck im Kessel muss sich erhöhen, damit der Volumenstrom gleich bleibt.

Aufgabe 71

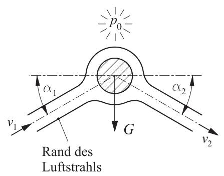
Ein Ball vom Gewicht G wird von einem Luftstrahl reibungsfrei umströmt und dadurch in der Schwebe gehalten. Der Strahl strömt unter dem Winkel α_1 mit der Geschwindigkeit v_1 an. Die Kompression der Luft in der Nähe des Balls kann ebenso vernachlässigt werden wie die Wirkung der Schwerkraft auf den Luftstrahl. Es soll keine horizontale Kraft vom Luftstrahl auf den Ball ausgeübt werden.

(a) Wie groß ist v_2 (Abströmgeschwindigkeit)?

(b) Wie groß ist der Abströmwinkel α_2?

(c) Welcher Massenstrom im Strahl ist erforderlich, damit der Ball schwebt?

Geg.: v_1, G, α_1, p_0



(a) Bernoulli:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{40}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_2^2 \quad \Rightarrow |v_1| = |v_2| \tag{41}$$

(b) Impulssatz für einen Stromfaden:

$$\underline{F} = J(\underline{v_2} - \underline{v_1}), \quad J = \text{Massenstrom} \tag{42}$$

horizontale Komponente

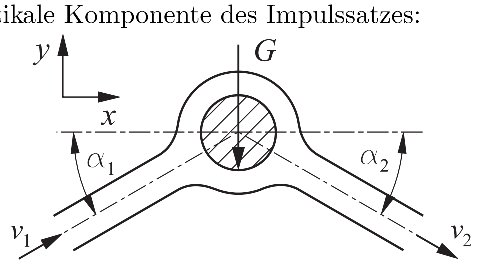
$$F_x = J(v_2\cos\alpha_2 - v_1\cos\alpha_1) \tag{43}$$

Annahme: keine Kraft in x-Richtung

$$0 = J(v_2\cos\alpha_2 - v_1\cos\alpha_1) \quad \Big| \; v_2 = v_1 \tag{44}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 \tag{45}$$

(c) vertikale Komponente des Impulssatzes:



$$F_y = -G = J(-v_2\sin\alpha - v_1\sin\alpha) \tag{46}$$

mit $v_2 = v_1$, $\alpha_2 = \alpha_1$:

$$J = \frac{G}{2v_1\sin\alpha_1} \tag{47}$$

ist der erforderliche Massenstrom.